

Primo incontro

Seconda parte: misure sperimentali con il Geiger

2.1 La distribuzione di eventi casuali: una misura sperimentale con il contatore Geiger

Cercheremo ora di osservare come si distribuiscono nel tempo gli eventi casuali, provenienti dal decadimento di radionuclidi o da altre sorgenti di radioattività naturale, in una situazione in cui il numero degli eventi che succedono in un certo intervallo di tempo Δt è piccolo, come succede nel caso in cui la radioattività è puramente ambientale. Oltre a darci una misura dell'attività delle sorgenti di radioattività naturale, a cui siamo abitualmente esposti, queste misure ci permetteranno di essere molto sensibili alle fluttuazioni e potremo quindi studiare una distribuzione statistica importante, che governa questo tipo di fenomeni, chiamata *distribuzione di Poisson*.

La *radioattività ambientale* è dovuta a svariate cause che contribuiscono a creare nell'ambiente la presenza di vari tipi di radiazione. Un contributo importante è dovuto ai “raggi cosmici”, cioè a quella radiazione che proviene dal cosmo, principalmente dal Sole, e che consiste di un flusso importante di particelle di alta energia, quali protoni, neutroni, raggi γ , nuclei leggeri oppure particelle instabili come i “muoni” (che sono simili agli elettroni ma hanno una massa circa duecento volte maggiore), ecc. A questa radiazione si aggiunge il contributo dei radionuclidi che sono presenti in piccole tracce nei materiali che ci circondano, come i muri delle case, l'aria stessa, il nostro corpo, ecc.: nei materiali delle case, come mattoni, pietre, cemento, si trovano principalmente tracce di uranio, nell'aria il radionuclide principale è il gas radon, che si produce nelle catene della famiglia radioattiva dell'uranio, nel nostro corpo e nelle sostanze organiche in generale, oltre a tracce di uranio, possiamo avere anche tracce di radionuclidi leggeri come il carbonio 14, C^{14} , che, a differenza del più comune C^{12} è radioattivo, o il potassio 40, K^{40} , che è l'isotopo radioattivo del più comune K^{39} . Il totale di tutta questa radiazione forma il “fondo di radiazione ambientale”, a cui il nostro corpo è ben adattato e che quindi non costituisce un rischio.

Il fondo naturale è abbastanza costante sulla superficie della terra, ma può avere delle variazioni, anche importanti, da una zona all'altra a causa, ad esempio, dell'altitudine (alle grandi altitudini la radiazione cosmica aumenta, perché diminuisce l'assorbimento da parte dell'atmosfera) oppure per la presenza di materiali con un contenuto maggiore di radioattività.

Scopo dell'esperimento è esplorare, con l'aiuto del rivelatore Geiger, le caratteristiche della distribuzione temporale di questa radiazione.

- Una prima serie di misure sperimentali sarà dedicata a misurare l'entità della radiazione di fondo, cioè a *contare* quante particelle colpiscono il rivelatore in un certo intervallo di tempo, per avere un'idea dell'entità del fenomeno.
- Verrà poi eseguito un conteggio su un tempo abbastanza lungo (una ventina di minuti) per raccogliere un buon numero di particelle: si registreranno però i conteggi ogni 10 secondi, in modo da poter analizzare le fluttuazioni statistiche e confrontarle con la distribuzione di Poisson.
- Infine si farà una serie di misure per esplorare se ci sono variazioni sensibili nei conteggi della radiazione di fondo spostandosi nella stanza o andando all'aperto oppure in vicinanza di materiali particolari.

Il Geiger a disposizione per i conteggi è mostrato in figura. Contiene un piccolo “rivelatore”, cioè una sostanza nella quale, al passaggio di una radiazione di alta energia, si liberano degli elettroni per ionizzazione¹. Gli elettroni vengono moltiplicati attraverso un intenso campo elettrico

¹ Questo è il motivo per cui le radiazioni vengono chiamate *ionizzanti*, per distinguerle dalle altre radiazioni, come quelle luminose o infrarosse, che, avendo energia molto minore, non producono effetti rilevanti di ionizzazione.

fino a produrre una piccola corrente elettrica, che dura un tempo brevissimo, ma sufficiente per poter essere raccolta e amplificata. Il meccanismo verrà approfondito nel secondo incontro, per la nostra applicazione ci basta capire che, se l'impulso di corrente è sufficientemente intenso, il *segnale elettrico* può venire "contato" e quindi, ad ogni passaggio di una particella ionizzante, il Geiger darà un "conteggio".



Figura 2.1

Foto in alto a sinistra: mostra il rivelatore visto dall'alto. Si osserva bene la finestra a cristalli liquidi in cui si possono leggere i *conteggi totali*. Per avere la visualizzazione dei conteggi totali, anziché di altri tipi di dati, occorre schiacciare il *bottonone di selezione*. La levetta dell'*indicatore di posizione* serve invece per scegliere fra conteggi totali o conteggi mediati su un secondo.

Foto in alto a destra: mostra la *finestra di ingresso* che protegge la zona sensibile alle radiazioni.

Foto a fianco: mostra come posizionare il rivelatore per esaminare un campione di materiale "sospetto".



Rispetto ai rivelatori che verranno usati nel secondo incontro, il rivelatore Geiger che useremo in questo incontro ha prestazioni molto più limitate, perché la quantità di sostanza sensibile al passaggio della radiazione ionizzante è molto minore e anche l'energia minima che debbono avere le particelle per dare un segnale elettrico rivelabile è molto maggiore. Non si possono quindi fare

misure quantitative di precisione, tuttavia le prestazioni sono sufficienti per queste prime esplorazioni sulla radioattività. Che cosa potrete fare?

- Anzitutto esaminate il contatore: ha due modi di funzionare, che si possono selezionare spostando la levetta su una delle due posizioni,
 - sulla posizione “1”, il dato che compare nel visore è il conteggio per secondo, quindi direttamente i “bequerel” istante per istante (per leggerli, selezionare “*BEQ*” con il pulsantino “modo”). Noterete anche il breve segnale sonoro che viene mandato ogni volta che viene rivelato il passaggio di una particella.
 - sulla posizione “2”, compare sul visore il conteggio totale, dall’istante dell’accensione (per leggerlo, selezionare “*TOT*” con il pulsantino “modo”). Anche in questa modalità un breve segnale sonoro segnala il passaggio di una particella.

Provate le due posizioni:

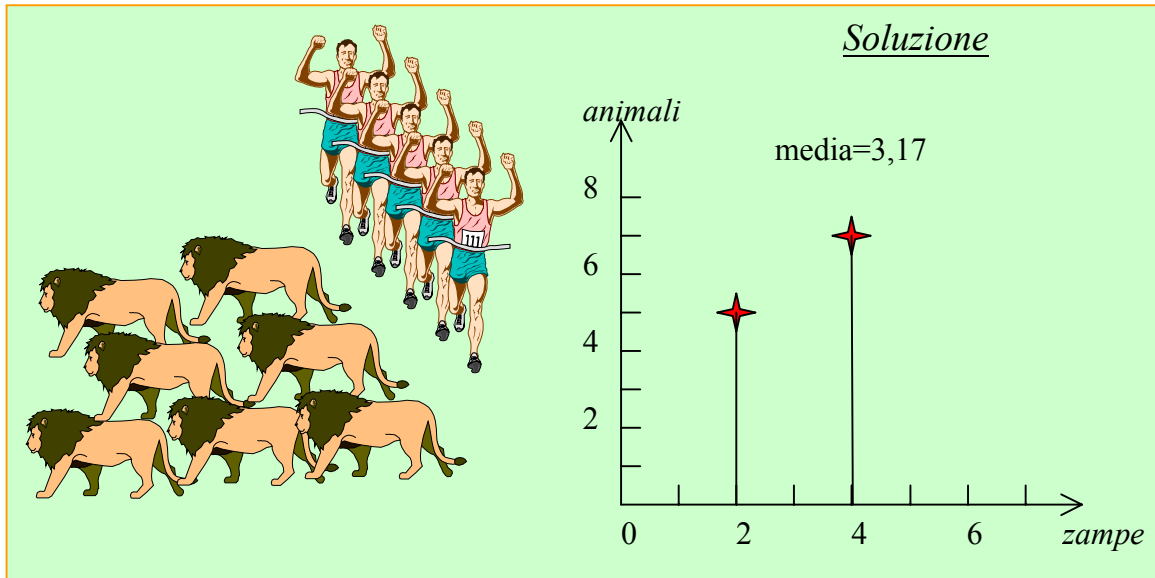
- cercate di capire, con l’indice sulla posizione “1”, l’ordine di grandezza dei Bq che il contatore registra (saranno pochissimi, tanto che avrete difficoltà a registrarli)
 - portate poi l’indice sulla posizione “2” e selezionate anche il modo “*TOT*” di visualizzazione: in questa posizione i conteggi sono apprezzabili. Seguiteli per qualche minuto, spostando eventualmente la posizione o l’orientamento del contatore per vedere se ci sono differenze apprezzabili. Vi renderete conto che avete bisogno di registrare anche il tempo di conteggio: usate il cronometro, valutate il conteggio medio per minuto e per secondo.
- Distribuzione degli eventi. Il valore medio dei conteggi è interessante, perché dà un’idea dell’ordine di grandezza della radioattività presente nell’ambiente, ma l’aspetto che ci preme di più indagare è come questi eventi radioattivi sono distribuiti nel tempo. Un valore medio, infatti, non esaurisce tutta l’informazione che si può estrarre da una misura, come questa, che è basata su un numero elevato di singoli eventi: per capire effettivamente la natura del fenomeno occorre esaminare tutta la “distribuzione”. Già la breve segnalazione sonora che accompagna il passaggio di una particella attraverso il geiger dà l’idea della irregolarità di questa distribuzione e quindi della natura casuale o *stocastica* del fenomeno: in certi istanti infatti si “sentono” accavallarsi più eventi, mentre poi ci sono degli intervalli di “silenzio” piuttosto lunghi.
Come si fa a sapere se una distribuzione è veramente stocastica? Per chiarirci le idee, facciamo un esempio opposto, prendiamo cioè una situazione in cui la distribuzione è sicuramente *deterministica*, cioè non stocastica, come quella del seguente problema.

Problema:

Supponete che qualcuno vi dica di aver contato 38 “zampe” e 12 “teste” in un gruppo di “animali”. Domande:

- calcolate il numero medio di “zampe” per “animale”,
- fate la distribuzione del numero di animali che hanno un certo numero di zampe.

La distribuzione si può *determinare* benissimo a priori perché, avendo gli “animali” solo la scelta fra 2 e 4 “zampe”, c’è una sola possibilità: la scelta cioè non è casuale, ma determinata da fattori ben precisi.



Nel caso delle radiazioni ionizzanti, la scelta è invece completamente casuale. Infatti, in un certo istante, può succedere che un radionuclide, presente nel materiale della stanza, decada e che una particella ionizzante prodotta dal suo decadimento, arrivi nel geiger e faccia scattare il conteggio. All'istante successivo, invece, la cosa può benissimo non ripetersi più, oppure può capitare che arrivino due particelle sul geiger. Se perciò contiamo tutte le particelle che arrivano in un intervallo di tempo, ad esempio di 10 s, troveremo che il numero che arriva varia da un intervallo all'altro, anche se in media avrà un certo valore.

La scelta dell'intervallo di 10 s non è obbligata, tuttavia la suggeriamo perché è un intervallo di tempo ragionevole: è infatti possibile registrare i dati, ma anche accumulare abbastanza conteggi per vedere la distribuzione (chiameremo tale intervallo δt_{10}).

Il modo più semplice di fare la misura e registrare i dati è di lasciare che il contatore accumuli i conteggi in continuazione per una ventina di minuti, registrando i valori accumulati ogni 10 secondi. In dettaglio conviene:

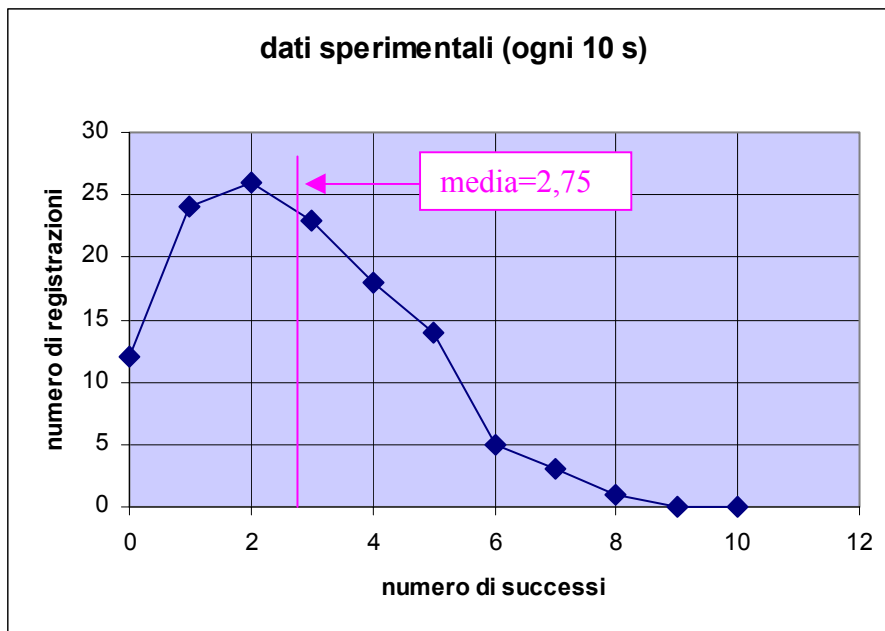
- preparare una tabella in cui sono predisposti, incolonnati, i valori di minuti e secondi in intervalli pari a δt_{10} ,
- predisporre cronometro e geiger e azzerare entrambi,
- spostare l'indicatore del geiger sulla posizione “2” e contemporaneamente far partire il cronometro,
- registrare il conteggio totale indicato dal contatore ogni 10 s.

Terminato il conteggio, si potrà

- calcolare anzitutto il *valore medio* dei conteggi nell'intervallo di tempo δt_{10} , dividendo il numero finale registrato dal geiger per i secondi di conteggio e moltiplicando per 10;
- calcolare i conteggi nei singoli intervalli, facendo la differenza fra i conteggi totali registrati a un certo istante e i conteggi registrati all'fine dell'intervallo precedente. Si noterà che ci sono degli intervalli in cui i conteggi sono zero e altri in cui il numero è abbastanza alto, ma, in media, si addensano intorno al valore medio calcolato prima;
- fare la distribuzione della *frequenza* con cui si è registrato un certo conteggio in funzione dei conteggi: a tale scopo occorre contare il numero di intervalli δt_{10} in cui si è registrato quel conteggio e riportarlo su un grafico

In figura è mostrata come esempio la distribuzione ottenuta in uno studio al dipartimento di Fisica: il valore medio è pari a 2,75 conteggi, ma si vede, ad esempio, che ci sono stati ben 13 intervalli in cui si sono registrati 0 conteggi e un caso in cui si sono registrati 8 conteggi! La riga tratteggiata in rosso indica la posizione della media: i conteggi più prossimi al valore medio,

cioè 2 o 3, sono stati effettivamente fra i più frequenti, però la distribuzione non è affatto simmetrica, in particolare ha una lunga “coda” che si estende verso l’alto numero di conteggi. Questo fatto è abbastanza da attendersi, perché la distribuzione non può scendere sotto gli zero conteggi, mentre verso i valori alti di conteggi possono capitare delle “fluttuazioni” che conducono a degli accumuli casuali di eventi in un particolare intervallo di tempo.

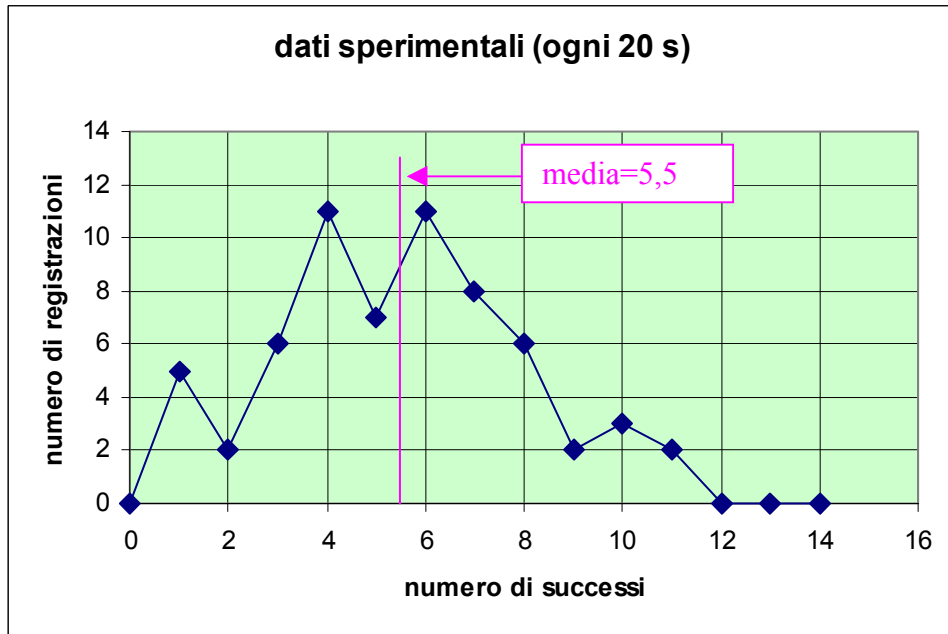


I dettagli dei conteggi sono riportati nella seguente tabella:

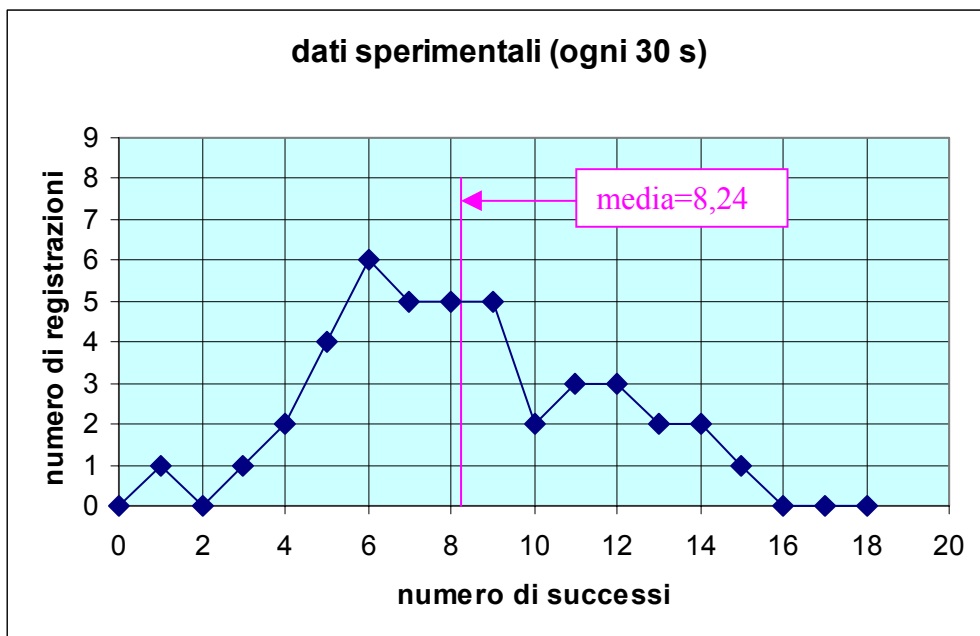
conteggi ==>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Intervalli con quel numero di conteggi	12	24	26	23	18	14	5	3	1	0	0

Per sveltire i conti, abbiamo registrato i dati direttamente su un foglio EXCEL, che è disponibile nel foglio dati-10s del file “esperimento.xls”: il foglio permette la costruzione del grafico, il calcolo della media e la sua rappresentazione sul grafico e, volendo, il calcolo automatico delle frequenze con cui si verificano i vari conteggi. La guida alla costruzione del foglio è riportata più avanti nella “Guida alla costruzione del foglio *esperimento.xls*”.

- Altre distribuzioni Quale distribuzione avremmo ottenuto se, anziché su intervalli di tempo di 10 secondi, avessimo raccolto i conteggi su 20 secondi? Ci aspettiamo che il valore medio raddoppi, ma è più difficile immaginare come varia la distribuzione. Avendo i dati a disposizione sul foglio elettronico, basta calcolare le differenze fra i conteggi integrali ogni 20 secondi, anziché ogni 10 s (intervallo δt_{10}). I risultati sono riportati nel grafico che segue.

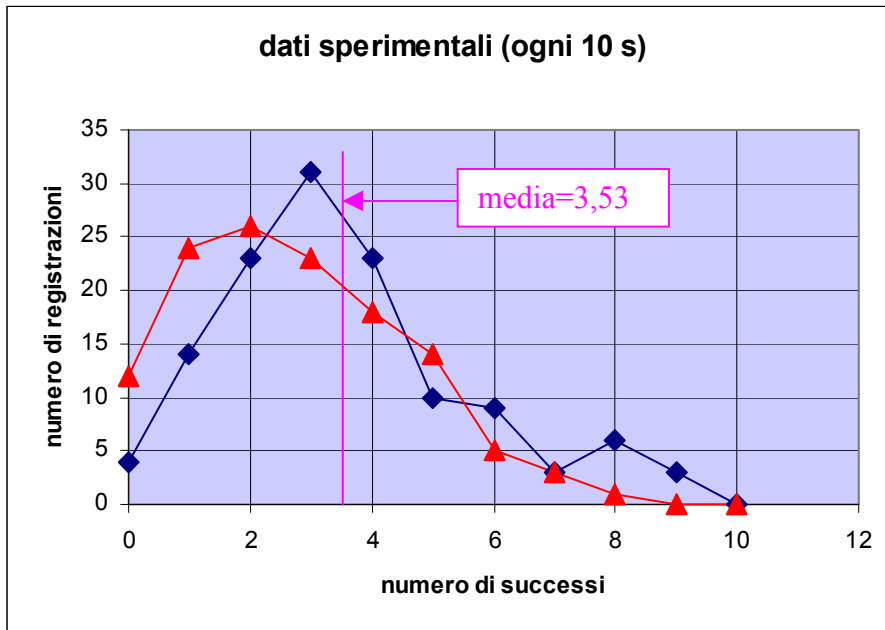


Come si vede, la media è raddoppiata, tutta la distribuzione si è spostata verso i valori alti ed è diventata più simmetrica, il che è anche ragionevole, visto che lo zero è ora più distante dal picco della distribuzione. Ci sono però maggiori fluttuazioni, perché il numero di conteggi si è dimezzato. Possiamo continuare il gioco e andare a intervalli di 30 s: il grafico è nella figura che segue: la media è triplicata, la distribuzione si è spostata verso l'alto ed è diventata ancora più simmetrica, perché ormai lo zero è abbastanza lontano.



➤ Conteggi in vicinanza di materiali particolari

E' abbastanza facile trovare lievi variazioni di radioattività in vicinanza di alcuni materiali o in certi ambienti, oppure a grandi altitudini. Nella figura, ad esempio, sono riportati i conteggi, registrati ogni 10 s, vicino a della sabbia che è leggermente più attiva della media ambientale. Anche la distribuzione è leggermente spostata verso l'alto, se confrontata con la distribuzione precedente, che mostriamo sovrapposta con i triangolini rossi, ma la forma è simile, con la asimmetria ben visibile e la lunga coda verso l'alto.



2.2 Guida alla costruzione dei fogli “esperimento.xls”

Nell'archivio “esperimento.xls” si trovano 4 fogli EXCEL.

I primi due sono predisposti per la raccolta dei dati dei conteggi totali registrati con il contatore Geiger ogni 10 secondi per 21 minuti e contengono i calcoli necessari per arrivare ai conteggi differenziali e al grafico: il primo foglio ogni 10 s, il secondo ogni 10 s, 20 s e 30 s. Il terzo e il quarto foglio sono dei “demo” corrispondenti, con i dati registrati durante le misure fatte da noi e descritte nel testo. Questi sono i dati a cui faremo riferimento nella spiegazione che segue.

Foglio “dati-10s” e foglio “demo-10s”

Il foglio è predisposto per la registrazione e l'analisi dei dati relativi ai conteggi del contatore Geiger ogni 10 s.

Dati che vengono inseriti manualmente:

- in colonna A si introducono manualmente i minuti iniziali dell'intervallo di tempo δt_{10} in cui si eseguiranno i conteggi,
- in colonna B i secondi iniziali,
- in colonna C il corrispondente conteggio totale registrato dal Geiger: nel foglio “dati-10s” i contenuti delle celle di questa colonna sono tutti nulli perché ad essi andranno sostituiti i dati trovati nella registrazione,
- nella cella F2 il numero totale di intervalli (“prove”) considerati: nell'esempio, sono stati presi 126 dati, corrispondenti a 21 minuti, anche se nella figura riportiamo solo i dati dei primi 2 minuti.

Valori calcolati:

- in colonna D si calcolano le differenze fra i conteggi totali all'inizio di ogni intervallo δ_{10} ottenendo così i conteggi di quell'intervallo, che è il dato che interessa (l'istruzione per la cella D5 è =C5-C4, che poi viene "trascinata" per le celle successive),
- nella cella G2 si calcola il valore medio di conteggi ("successi"), a partire dal conteggio finale, che, nell'esempio, si trova nella cella C130 (l'istruzione per la cella G2 è quindi =C130/F2)

	A	B	C	D	E	F	G
	Minuti	S	Numero totale di conteggi	Numero di conteggi ogni 10 s		numero di prove	numero medio di successi
1							
2						126	2,75
3							
4	0	0	0				
5		10	8	8			
6		20	9	1			
7		30	12	3			
8		40	15	3			
9		50	16	1			
10	1	0	16	0			
11		10	19	3			
12		20	20	1			
13		30	22	2			
14		40	24	2			
15		50	27	3			
16	2	0	30	3			

Sulla base dei conteggi dei singoli intervalli di tempo δ_{10} riportati in colonna D si può procedere a contare manualmente la frequenza di ciascun conteggio, cioè quante volte quel dato conteggio compare nella colonna D. I valori vengono poi riportati nelle celle da J2 a T2 per essere pronti per il grafico, mentre nelle celle da J1 a T1 sono riportati i corrispondenti conteggi.

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	conteggi ==>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Intervalli con quel numero di conteggi	12	24	26	23	18	14	5	3	1	0	0

Grafici

- distribuzione delle frequenze: in ascisse si riportano i dati dalle celle J1 a T1, in ordinata dalle celle J2 a T2,
- media: si traccia una retta, in corrispondenza del valore delle ascisse pari alla media e le ordinate fra 0 e il massimo valore dei dati aumentato di due (cella G10=MAX(I2:S2)+2).

Calcolo automatico delle frequenze dei conteggi

Nel foglio è poi predisposta una logica per ottenere automaticamente il calcolo della frequenza con cui si è verificato un dato conteggio, cioè i numeri riportati nelle celle J2 a T2. Riportiamo nella tabella che segue solo le colonne rilevanti e per i dati relativi ai primi 2 minuti. Nella colonna D ci

sono i dati relativi ai conteggi nei singoli intervalli di tempo, ottenuti a partire dai conteggi integrati come spiegato sopra, mentre nelle celle dalla J1 alla T1 sono predisposti i numeri di conteggi che si vogliono esaminare.

	D	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Numero di conteggi ogni 10 s	conteggi →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		intervalli con quel numero di conteggi →	13	21	28	24	17	14	5	3	1	0	0
3													
4													
5	8		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
8	3		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	3		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
12	1		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	2		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
14	2		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
15	3		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
16	3		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Cominciamo dal conteggio 0, a cui è riservata la colonna J: se in un certo intervallo di tempo δt_{10} si sono verificati zero conteggi, indicheremo nella corrispondente cella della colonna J un "1", se invece si è verificato un numero di conteggi diverso metteremo 0. Ad esempio, nei dati riportati nella tabella, compare 0 nella cella D10, pertanto nella cella J10 comparirà un "1", mentre c'è 0 in tutte le celle della colonna J alle quali corrisponde un numero diverso da 0 in colonna D. L'istruzione per ottenere ciò, ad esempio per la cella J5, è la seguente: =SE(D5=J\$1;1;0). In questo modo, alla fine, basterà sommare tutti i contenuti delle celle dalla J5 alla J130 per ottenere il risultato voluto, che viene scritto nella cella J2 (istruzione = SOMMA(J5:J130)). La stessa logica è ripetuta, in modo simile, nelle altre colonne.

Foglio "dati-10-20-30" e foglio "demo-10-20-30"

I dati ai conteggi registrati e quelli calcolati relativamente agli intervalli di tempo di 10 s sono gli stessi del foglio precedente, anzi, per il foglio "dati-10-20-30" i dati di colonna C debbono essere copiati dal foglio "dati-10s". In questo foglio si aggiunge soltanto la colonna E con i dati relativi ai conteggi ogni 20 s, ottenuti sottraendo gli stessi valori dei conteggi integrati di colonna C ma ogni 20 s, e, analogamente, in colonna F per i dati ogni 30 s.

Nelle celle intermedie, per le quali non va fatto il conteggio, è stato inserito manualmente un valore negativo: è semplicemente un artificio per evitare che queste celle vengano contate nella successiva procedura automatica che permetterà di trovare il numero di intervalli in cui si è verificato un certo conteggio. La logica di tale calcolo si trova dalle colonne W alla colonna AK per l'intervallo di tempo δt_{20} e dalla colonna AM alla colonna BG per l'intervallo δt_{30} , ed è una ripetizione, con le debite modifiche, dei calcoli fatti per i 10 secondi.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	minuti	s	numero totale di conteggi	numero di conteggi ogni 10 s	Numero di conteggi ogni 20 s	Numero di conteggi ogni 30 s		Numero di prove	numero medio di successi
2							ogni 10 s =>	126	2,75
3							ogni 20 s =>	63	5,5
4	0	0	0				ogni 30 s =>	42	8,24
5		10	8	8					
6		20	10	2	10				
7		30	12	2	-1	12			
8		40	15	3	5	-1			
9		50	16	1	-1	-1			
10	1	0	16	0	1	4			
11		10	19	3	-1	-1			
12		20	20	1	4	-1			
13		30	22	2	-1	6			
14		40	24	2	4	-1			
15		50	27	3	-1	-1			
16	2	0	30	3	6	8			

Primo incontro

Terza parte: la distribuzione di Poisson

3.1 La distribuzione di Poisson: una simulazione di eventi casuali

Abbiamo detto più volte che la distribuzione delle radiazioni che colpiscono il rivelatore in un certo intervallo di tempo è casuale e infatti, come abbiamo osservato, è alquanto irregolare, con forti fluttuazioni da un intervallo di tempo al successivo. Ma come facciamo a sapere se è *effettivamente e completamente casuale*? Una distribuzione è casuale se non c'è nessuna correlazione fra le scelte che si sono realizzate in una certa "prova" e quelle che si realizzano nella prova successiva, anche se i valori medi, calcolati su un grandissimo numero di prove, sono stabili. Una distribuzione di questo tipo segue una legge ben nota, che si può derivare analiticamente, partendo dalle ipotesi fondamentali della teoria della probabilità ed è chiamata "distribuzione di Poisson".

Per capirne il significato, faremo riferimento proprio alle misure fatte sulle radiazioni che colpiscono il contatore Geiger in un certo intervallo di tempo, ad esempio δt_{10} . Supponiamo che in un certo intervallo δt_{10} il contatore abbia registrato un numero n di conteggi, ad esempio $n=3$: questi 3 conteggi sono dovuti a 3 particelle ionizzanti che, *casualmente*, hanno attraversato la zona sensibile del contatore proprio durante quell'intervallo. Diremo che abbiamo avuto 3 "successi" e chiameremo n il numero di successi registrati. Perché diciamo "casualmente"? Perché, quando è stata fatta la misura, c'erano probabilmente, intorno al Geiger, milioni di miliardi di nuclei radioattivi che potevano decadere e c'erano anche probabilmente miliardi di particelle provenienti dalla radiazione cosmica, ma la probabilità che uno di questi raggi cosmici o una particella ionizzante proveniente da un decadimento radioattivo *casualmente* finisse sulla zona sensibile del rivelatore Geiger proprio in quell'intervallo δt_{10} era bassissima, per cui, in quell'intervallo di tempo, solo 3 particelle hanno attraversato il contatore. In un altro intervallo di tempo abbiamo invece trovato un numero n di "successi" diverso, ma, ripetendo le misure su molti intervalli δt_{10} , abbiamo trovato un valore medio di successi, m , pari a 2,75. Possiamo interpretare il valore medio in questo modo: pur non conoscendo il numero totale N di nuclei radioattivi e raggi cosmici da cui provengono le particelle che attraversano il Geiger nell'intervallo δt_{10} , né la probabilità p che ciò avvenga, sappiamo però che il prodotto $p \cdot N$ è pari a m :

$$m = p \cdot N$$

Abbiamo quindi trovato i parametri importanti per descrivere il fenomeno casuale:

- il numero medio m di successi attesi,
- il numero n di successi effettivamente registrati,
- la probabilità p di avere un successo,
- il numero totale N da cui siamo partiti.

Cercheremo ora di simulare un processo casuale simile a quello che ci ha condotto alla distribuzioni sopra misurate ricorrendo a un metodo molto usato per la simulazione di eventi dovuti a reazioni nucleari, il "*metodo di Montecarlo*": questo metodo fu infatti usato proprio da Enrico Fermi per simulare le reazioni casuali che avvengono all'interno di un reattore nucleare.

Iniziamo con un esempio. Supponiamo di giocare alla tombola: abbiamo cento bussolotti, sui quali ci sono i numeri da 1 a 100. Decidiamo che avremo un "successo" se, ad esempio, esce un numero minore o uguale a 7, cioè un numero qualunque compreso fra 1 e 7. La probabilità che ciò accada è chiaramente del 7%. Se facciamo una singola *prova*, avremo una probabilità piuttosto bassa di avere un successo, cioè che esca un numero minore o uguale a 7, se però facessimo un numero elevato di prove, il numero di successi salirebbe: ad esempio, con 40 prove, il numero di successi aspettati sarebbe 2,8, cioè molto vicino a 3. Ovviamente non ci aspettiamo che, ogni 40

prove, troviamo con certezza 3 successi, qualche volta ne troveremo 2, altre 3, ma, altre volte ancora, numeri variabili. Il *metodo di Montecarlo* consiste appunto in un algoritmo che permette di fare un numero N di *prove* in un modo *assolutamente casuale*: in ciascuna prova c'è il modo di definire la probabilità p di avere successo e di vedere pertanto come si *distribuisce* il numero n di successi intorno al valore medio m atteso, che è pari a pN .

Per essere sicuri di avere delle estrazioni completamente casuali si potrebbero usare proprio le estrazioni dei bussolotti della tombola (sembra che Fermi abbia usato inizialmente proprio un modo simile per procurarsi delle estrazioni casuali, dato che all'epoca non esistevano computer), ma sarebbe molto dispendioso in termini di tempo. Con l'avvento dei computer, tutto ciò è diventato molto più semplice: vediamo come, utilizzando il foglio EXCEL "poisson.xls".

➤ I fogli *random-i* e *random-demo*

In EXCEL è possibile generare dei numeri casuali fra 0 e 1, con l'istruzione "=CASUALE()". Useremo questa istruzione per simulare la "probabilità di avere successo" in una certa "prova". Supponiamo ad esempio che la nostra "prova" consista nell'estrarre un bussolotto della tombola: noi sappiamo che la probabilità p che esca un certo numero, ad esempio "7", o un numero più piccolo è pari a $7/100 = 0,07$. Se estraiamo un numero a caso fra 0 e 1, avremo proprio una probabilità pari a 0,07 che il numero estratto sia minore di 0,07: ci basterà quindi confrontare il numero a caso con 0,07, se è minore diremo che abbiamo avuto "successo", se è maggiore o uguale, diremo che la prova è fallita. Si può fare poi una prova successiva, con un nuovo numero a caso, e vedere se si realizza un successo o no e così via per N prove consecutive. Alla fine si contano i "successi" avuti in quelle N prove, cioè in quella "estrazione", e si ottiene il numero n di successi: il numero medio m di successi aspettato teoricamente è pari a $p \cdot N$, ma il numero effettivamente trovato n sarà diverso a ogni estrazione, pur mantenendosi intorno al valore di m .

La logica con cui possiamo far fare questo al computer si trova nel foglio "random-i":

- si imposta in una cella il valore della probabilità p (nel foglio è la cella E3, nell'esempio $p=0,1667$),
- si imposta in un'altra cella il numero N di "prove" che si vogliono fare per una certa "estrazione" (cella D3, nell'esempio $N=40$),
- si imposta in una cella l'istruzione di trovare un numero a caso fra 0 e 1 (cella A3=CASUALE()),
- si "trascina" l'istruzione per un totale di N celle.

Per contare il numero di "successi", la logica viene impostata nella cella a fianco del numero casuale e consiste nel confrontare il numero casuale con p : se è minore di p , viene impostato "1" nella cella, a indicare "successo", se è maggiore o uguale viene impostato "0", a indicare "fallimento". L'istruzione è la seguente (ad esempio per il numero casuale della cella A3):

$$B3==SE(A3<E$3;1;0)$$

Nell'esempio riportato qui di seguito è stato trovato un numero casuale minore di p nelle celle A6, A8, A10, A16, A22, A24 e A40, per cui, nelle corrispondenti celle della colonna B, si trova "1".

Basterà poi sommare i contenuti delle N celle dalla B3 alla B42 che contengono "1" in caso di successo per avere il numero totale di successi ottenuti nella estrazione simulata. Nel foglio, il risultato è messo nella cella G3:

$$G3==SOMMA(B3:B42)$$

	A	B	D	E	F	G
1	Numero a caso	vero / falso	numero totale di "prove" N	probabilità teorica p	Numero medio di successi atteso teoricamente m	numero di successi realmente trovati nell'estrazione attuale
2						
3	0,731778	0	40	0,1667	6,67	7
4	0,999427	0				
5	0,582521	0				
6	0,150142	1				
7	0,751134	0				
8	0,101655	1				
9	0,564193	0				
10	0,148102	1				
11	0,718915	0				
12	0,670989	0				
13	0,996397	0				
14	0,83073	0				
15	0,807951	0				
16	0,096795	1				
17	0,831118	0				
18	0,62166	0				
19	0,535711	0				
20	0,424152	0				
21	0,812224	0				
22	0,068098	1				
23	0,997844	0				
24	0,041215	1				
25	0,985178	0				
26	0,64588	0				
27	0,394201	0				
28	0,663846	0				
29	0,838681	0				
30	0,896874	0				
31	0,409504	0				
32	0,951565	0				
33	0,534828	0				
34	0,759118	0				
35	0,513436	0				
36	0,6669	0				
37	0,832243	0				
38	0,666082	0				
39	0,798995	0				
40	0,142551	1				
41	0,200142	0				
42	0,805846	0				

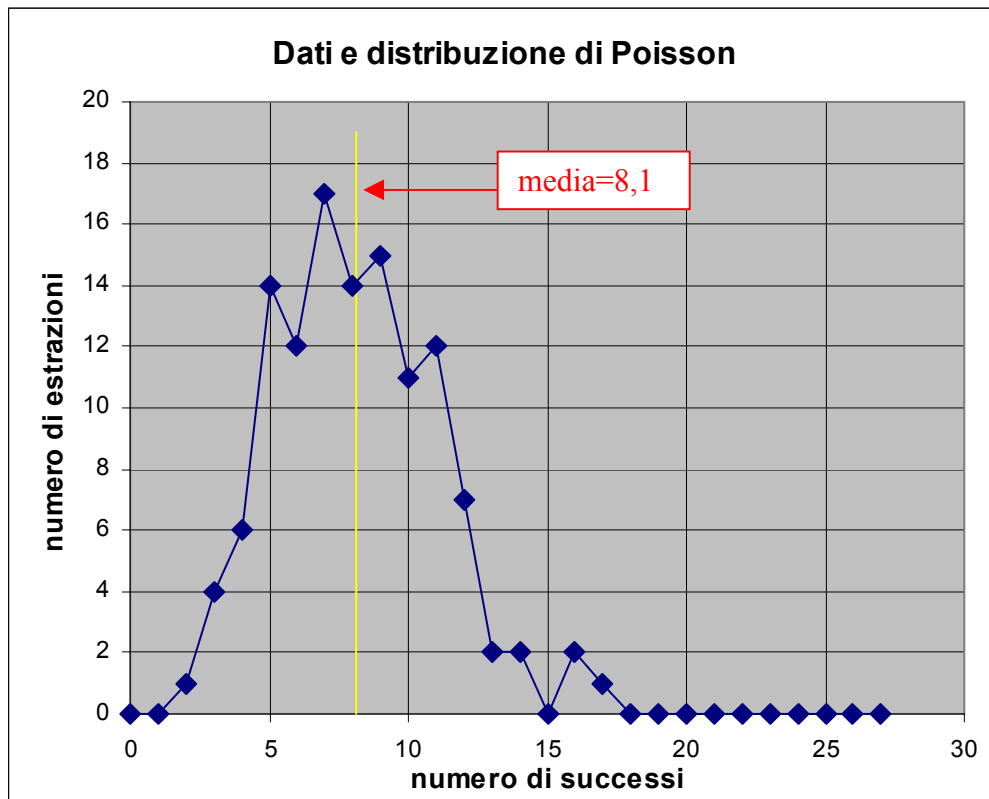
Per fare una nuova “estrazione” basterà ricalcolare il primo numero a caso, nella cella A3: automaticamente verranno cambiati tutti i successivi, senza bisogno di “trascinare l’istruzione”.

Veniamo ora alla logica per calcolare il valore medio del numero di successi ottenuti e costruire il grafico della distribuzione della *frequenza* con cui è stato realizzato un certo *numero di successi* nelle estrazioni fatte. Si predispongono, in una opportuna colonna (nell’esempio nelle celle L3-

L33), i numeri consecutivi da 0 a 30 (il limite superiore può ovviamente variare da caso a caso): saranno i valori da riportare nell'ascissa del grafico, cioè il "numero di successi" ottenuti in una certa estrazione. Nelle celle a fianco verrà segnata una "x" man mano che, in una certa estrazione, viene trovato quel numero di successi: nell'esempio, abbiamo fatto 9 estrazioni in tutto, nelle quali sono stati trovati una volta sola 2 successi, 3 successi, 4 successi, 6 successi, 8 successi e 9 successi, mentre per due volte sono stati trovati 7 successi. L'istogramma viene così costruito quasi naturalmente. Se lo si vuole far costruire da EXCEL, si possono contare le estrazioni che hanno dato un certo numero di successi (celle N3-N33 nell'esempio) e poi rappresentarle in un grafico. Gli stessi dati servono per calcolare la media (le celle P3-P33 contengono i numeri di successi, nella cella I3 si divide la somma sui numeri di successi per il numero di estrazioni).

	H	I	J	K	L	M	N
1	Numero totale di estrazioni	numero medio di successi trovati	.	.	numero di successi	.	Numero di estrazioni in cui si è trovato quel numero di successi
2							
3	9	6,67			0		0
4					1		0
5					2 x		1
6					3 x		1
7					4 x		1
8					5		0
9					6 x		1
10					7 xx		2
11					8 x		1
12					9 x		1
13					10		0
14					11		0
15					12		0
16					13		0
17					14 x		1
18					15		0
19					16		0
20					17		0
21					18		0
22					19		0
23					20		0
24					21		0
25					22		0
26					23		0
27					24		0
28					25		0
29					26		0
30					27		0
31					28		0
32					29		0
33					30		0

Un esempio di grafico ottenuto con un numero elevato di estrazioni si trova nel foglio “demo-random” ed è riportato in figura: in questo caso la media attesa era 8, quella trovata è stata 8,1 dopo 120 estrazioni.



La somiglianza della distribuzione con quella ottenuta sperimentalmente con i conteggi su 30 s, che hanno media molto simile, è notevole, il che conferma la natura stocastica dei dati sperimentali. La distribuzione che si aspetta teoricamente, e che si otterrebbe continuando con un numero elevatissimo di estrazioni, è stata derivata partendo dai “principi primi” di probabilità e statistica e porta il nome di “distribuzione di Poisson”. La sua espressione è la seguente:

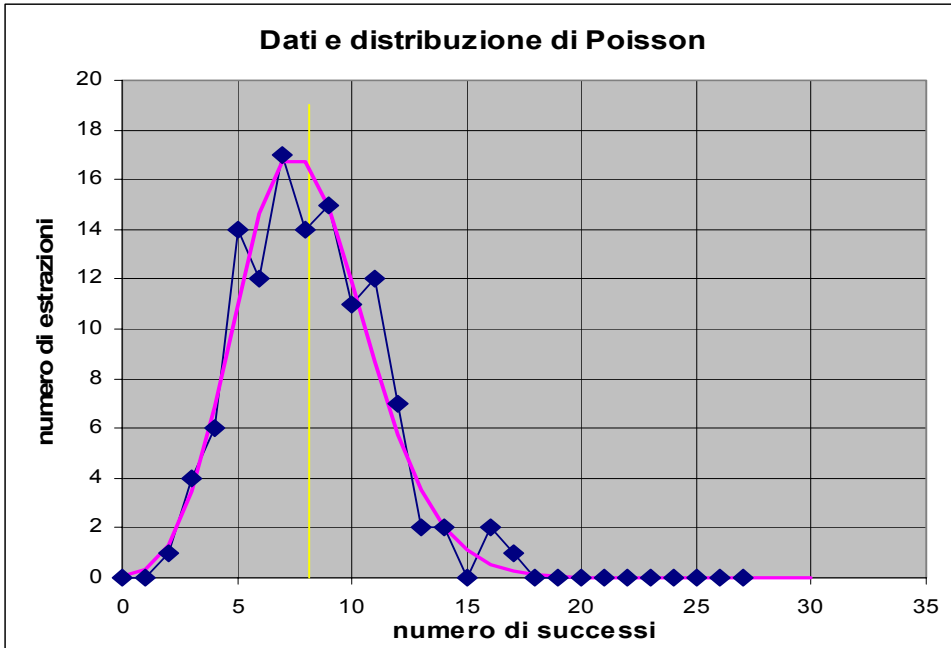
$$D_n(m) = N e^{-m} \frac{m^n}{n!}$$

dove m è il valore medio atteso per il numero di successi ($m=8$ nel caso del calcolo precedente), mentre n è il numero dei successi trovati in una certa estrazione ed N è il numero totale di estrazioni fatte. Il simbolo $n!$ è detto “fattoriale” ed è un modo sintetico per dire che si deve fare il prodotto di tutti i numeri interi successivi da 1 fino a n (esiste anche $0!$ che vale 1).

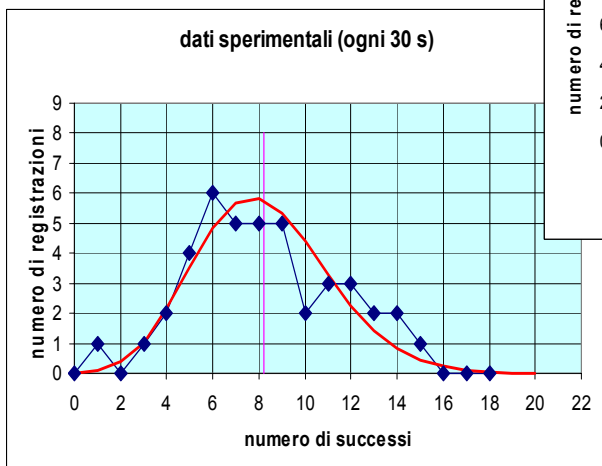
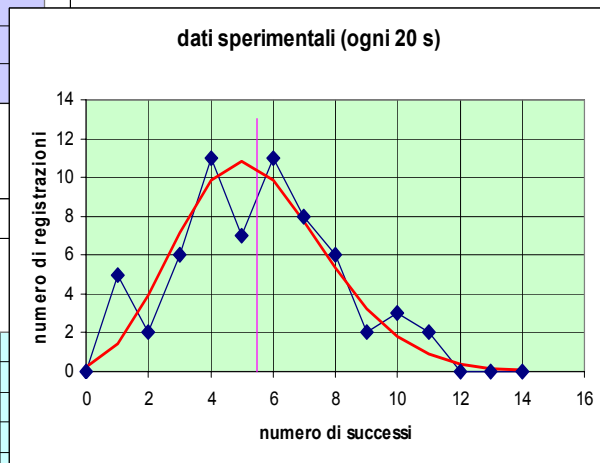
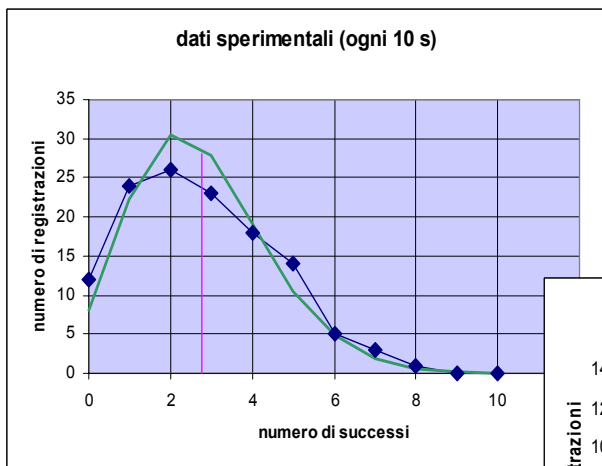
L’algoritmo per calcolare $D_n(m)$ è inserito nelle celle della colonna O del foglio, in corrispondenza di ogni valore di n . Il calcolo è fatto in modo ricorrente:

- si calcola prima il valore aspettato per $n=0$, che vale $D_0(m) = N e^{-m}$
- il valore per $n=1$ si calcola dal precedente moltiplicando per m , quindi $D_1(m) = D_0(m) m$
- il valore per $n=2$ si calcola dal precedente moltiplicando per m e dividendo per 2, quindi $D_2(m) = D_1(m) m/2$. Il “2” non va indicato esplicitamente ma come contenuto della cella che contiene n nell colonna L,
- per i successivi valori di n basterà “trascinare” la formula della cella con $n=2$.

Riportando in un grafico i valori calcolati dalla formula di Poisson, si ottiene la distribuzione teorica mostrata in figura sovrapposta ai dati simulati con le estrazioni casuali: come si vede i dati sperimentali si avvicinano bene alla curva teorica nonostante le fluttuazioni dovute al numero relativamente basso di estrazioni eseguite.



Possiamo anche sovrapporre la curva teorica ai dati sperimentali ottenuti dai conteggi del Geiger. In questo caso non conosciamo il “vero” valore medio aspettato, però possiamo usare per i calcoli di $D_n(m)$ il valore medio trovato, sperando che sia una buona approssimazione. Il risultato è mostrato nelle figure che seguono.



Le fluttuazioni in questo caso sono più forti che per i dati simulati, ma l'andamento è chiaramente ben riprodotto dalla distribuzione di Poisson!

Nel foglio "poisson" è riportato anche un modo più rapido di procedere per costruire la distribuzione partendo dall'estrazione di numeri a caso, nella pagina "random": è più indiretto e quindi meno consigliabile per un primo approccio, ma, oltre a essere più rapido, è anche più divertente perché permette di veder crescere la distribuzione casuale man mano che si fanno le estrazioni. Si procede inizialmente come nel caso precedente, però, una volta ottenuto il numero di successi per una certa prova, si procede a incrementare direttamente il conteggio delle frequenze corrispondenti nella colonna N. Se si è già predisposto il grafico, la distribuzione verrà aggiornata automaticamente e quindi la si vedrà crescere man mano che si fanno nuove estrazioni e diventare sempre più simile alla distribuzione di Poisson.