8. Fisica moderna - relatività

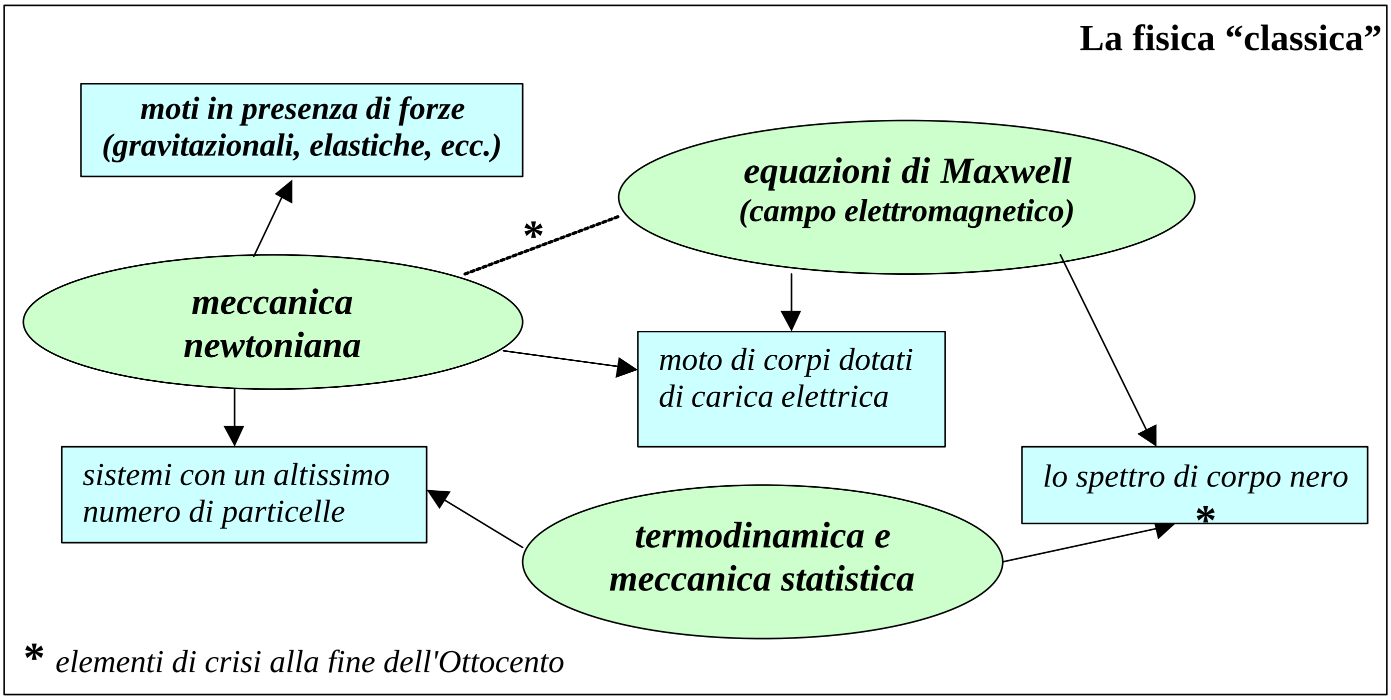
8.1 La fisica moderna nella scuola secondaria

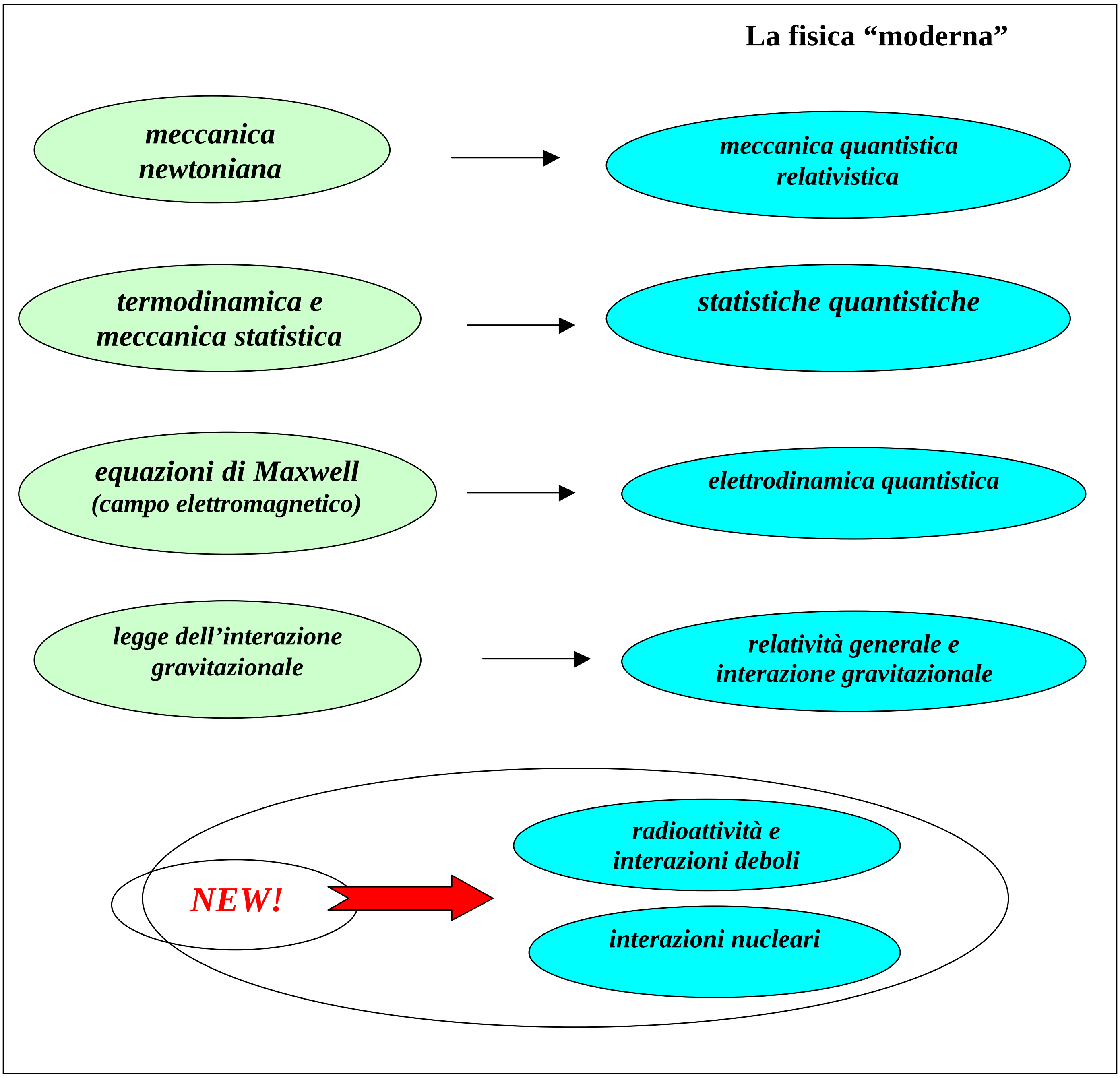
Motivazioni

Perché trattare temi di fisica moderna già nella scuola secondaria?

- Per l'interesse e la rilevanza culturale (Einstein è il simbolo dello scienziato-stregone, la fisica moderna è la fisica del XX° secolo)
- Per l'importanza dei concetti teorici: la descrizione dei fenomeni del mondo microscopico da un lato, l'astrofisica e la cosmologia dall'altro, richiedono la *meccanica quantistica* e la *relatività*; a livello più alto, la comprensione dei fondamenti ultimi della fisica (T.O.E.➔ Theory Of Everything) è basata sulla teoria dei campi quantistici e relativistici
- Per le applicazioni (dispositivi elettronici, optoelettronica, LASER, radioattività, energia nucleare, ecc.)
- Perché i concetti di fisica moderna richiedono un approfondimento e una rivisitazione dei concetti di fisica "classica"

Che cosa





Le difficoltà degli studenti

Nascono principalmente dal fatto che vengono a mancare i riscontri che derivano dall'esperienza diretta, dato che il mondo macroscopico in cui viviamo non è né quantistico né relativistico.

Occorre quindi individuare, per ciascun tema, le difficoltà concettuali che possono nascere e mettere a punto strategie mirate per superarle, ad esempio attraverso

a) *la metodologia*: il più possibile simile a quella utilizzata per i temi tradizionali (partire dalle conoscenze precedenti degli studenti, da situazioni concrete, dal "problema", ecc.);
b) *l'inquadramento epistemologico*: discutere <u>sempre</u> le evidenze sperimentali in rapporto alla teoria (anche per i temi di fisica moderna c'è un legame stretto fra ipotesi teoriche ed evidenze sperimentali, sia pure non immediatamente accessibili);
c) *la formalizzazione*: adeguata al livello di età e alla preparazione matematica;
d) *il raccordo con la fisica classica*: discutere gli elementi di continuità e quelli di frattura/novità rispetto alla fisica classica nonché i limiti di applicabilità delle leggi della fisica classica (le leggi "classiche" sono approssimazioni molto più agili e semplici delle leggi quantistiche e

relativistiche, valide nelle condizioni abituali dei fenomeni del mondo macroscopico e non relativistico in cui viviamo); anticipare o curare, trattando problemi di fisica classica, quegli aspetti che diventano poi essenziali in fisica moderna (ad esempio, l'utilizzo sistematico del concetto di quantità di moto in meccanica)

e) *l'inquadramento storico*: ripercorrere le principali tappe dello sviluppo storico dei concetti e inquadrarle nello sviluppo delle idee, nel contesto sociale e politico e nello sviluppo tecnologico, soprattutto se aiuta a identificare e ritrovare le stesse difficoltà concettuali che lo studente si trova ad affrontare

8.2 La relatività ristretta

Ci limiteremo alla relatività *ristretta* per diversi motivi:

- i principali elementi di innovazione concettuale sono già tutti presenti nella relatività ristretta, in particolare il concetto di spazio-tempo,
- le principali applicazioni, in particolare quelle alla fisica nucleare, richiedono solo la relatività ristretta,

Scelta degli argomenti

Anche limitandosi alla relatività ristretta, l'argomento è vastissimo e, per una trattazione completa, occorrerebbe dedicare un tempo generalmente non disponibile nella normale programmazione curricolare di una scuola secondaria. Inoltre le propedeuticità richieste sarebbero molto pesanti (ad es. le equazioni di Maxwell normalmente non si affrontano, nella forma richiesta, in una scuola secondaria).

Occorre quindi operare una *scelta accurata* di contenuti minimi. Tale scelta deve includere almeno:

- la *dilatazione del tempo e la contrazione dello spazio*,
- il "*tempo proprio*",
- *l'equivalenza massa-energia,*

ritenuti essenziali per capire l'innovazione dei concetti di spazio e tempo e l'implicazione che essa ha sul concetto di massa inerziale. Per questi contenuti, le propedeuticità indispensabili sono solo concetti di *meccanica classica*.

Ci sono moltissimi altri concetti, quali le trasformazioni di Lorentz e quindi il concetto di uno spazio quadridimensionale e dell'invarianza delle leggi fisiche per trasformazioni nello spazio quadridimensionale che sono molto importanti, per affrontare i quali tuttavia i tempi necessari sono notevoli, anche perché la matematica è subito più complessa, quindi vanno affrontati solo se la classe è ben preparata e c'è un tempo adeguato a disposizione [1].

Metodologia

- riesaminare i concetti rilevanti di fisica classica da cui partire, con un ripensamento che tenga conto delle concezioni spontanee o indotte degli studenti e del raccordo con la realtà sperimentale: i concetti riguardano essenzialmente lo spazio, il tempo, la velocità, la dinamica della variazione di velocità ed, eventualmente, l'elettromagnetismo;
- ripercorrere sommariamente i momenti cruciali dello sviluppo storico[2], con lo scopo di illustrare
  - come è nato il "problema",
  - gli esperimenti cruciali,
  - lo sviluppo delle idee, dai primi modelli "ad hoc" alla "*teoria di principio*".

[1] per questi, si può comunque fare riferimento a buoni testi anche di scuola secondaria , vedasi ad esempio U. Amaldi, "Fisica Moderna", ed. Zanichelli

[2] Per approfondimenti vedasi la biografia di Einstein scritta da Pais, "Sottile è il Signore", ed. Boringhieri

Il caso della teoria della relatività è infatti emblematico perché il problema nasce non tanto sulla base di nuove evidenze sperimentali, quanto sulle inconsistenze teoriche che maturano con la formulazione delle equazioni dell'elettromagnetismo e vale la pena esaminare come la comunità degli scienziati ha reagito di fronte a questo "problema".

8.3 Concetti rilevanti ed esperimenti di meccanica classica da ripensare

➔ ***Il concetto di intervallo di tempo e sua misura***

Conviene iniziare da un qualunque semplice esperimento (punti **a**, **b** e **d**) in cui sia necessario misurare una *durata*, come, ad esempio, la durata di una corsa o del volo di un proiettile o dell'oscillazione di un pendolo, e chiedere agli studenti di definire che cosa è, per loro, "l'intervallo di tempo". Gli studenti si troveranno in difficoltà, mentre è probabile che riescano a descrivere abbastanza facilmente come si misura un intervallo di tempo (cioè qual è il principio di funzionamento di un orologio[3]): il tempo è infatti la tipica grandezza di cui si sa dare solo una *definizione operativa* (cioè non si sa definire "che cosa è", ma si sanno descrivere le procedure da seguire per misurarla in modo da ottenere risultati precisi, ripetibili e universali). Questo fatto è sempre stato ben presente a tutti gli scienziati, incluso Newton[4], ma solo all'inizio del XX^o secolo, con Poincaré ed Einstein, ci fu una revisione critica della definizione operativa dell'intervallo di tempo.

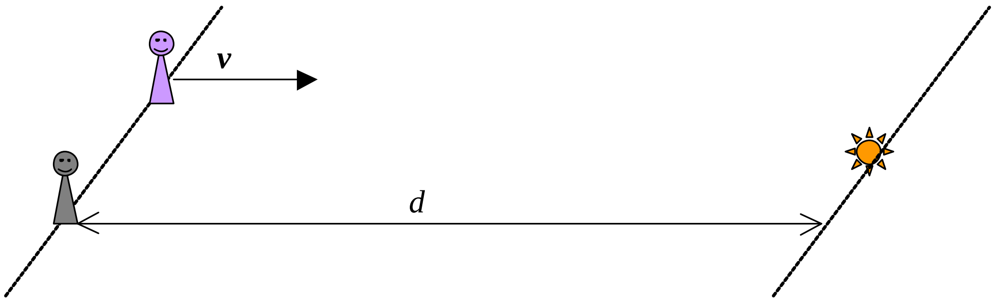
➔ ***La sincronizzazione degli orologi***

La revisione critica della sincronizzazione degli orologi a opera di Poincaré fu un passo cruciale nel dibattito dell'inizio del XX^o secolo che portò alla formulazione della teoria della relatività.
Conviene iniziare da una "situazione problema" (punto **a**): se volessimo sincronizzare il nostro orologio rispetto al tempo internazionale trasmesso con il segnale orario, che cosa dovremmo fare? Il segnale orario parte dall'Istituto Metrologico INRIM di Torino, va presumibilmente a Roma e da qui viene ritrasmesso e torna a Torino dove lo riceviamo, quindi dobbiamo correggere per il tempo che impiega l'onda elettromagnetica a percorrere i circa 1200 km di distanza, $Dt \approx 1{,}2 \cdot 10^6$ m / $3 \cdot 10^8$ m s^{-1} $\approx 4 \cdot 10^{-3}$ s. La correzione è tuttavia diversa per una diversa località.
Ancora più complessa è la sincronizzazione fra l'orologio di un osservatore fermo e quello di un osservatore in moto: se entrambi osservano il segnale luminoso emesso da una sorgente a una distanza *d*, lo vedranno come se fosse emesso a istanti diversi, perché giungerà prima all'osservatore che si sta muovendo verso la sorgente.

---

[3] L'orologio migliore è sostanzialmente quello che va d'accordo con il massimo numero di altri orologi. Con la scoperta da parte di Galileo della regolarità del moto pendolare divenne possibile costruire orologi precisi e che restavano in accordo fra di loro, anche in diverse parti del mondo (vedasi ad esempio il bel libro di Umberto Eco "L'isola del giorno dopo"). Anche oggi, in cui la misura del tempo ha raggiunto precisioni di una parte in 10^{12} grazie all'orologio atomico, gli orologi atomici posti nei diversi Istituti Metrologici dei diversi paesi (per l'Italia, all'Istituto Elettrotecnico Galileo Ferraris di Torino) vengono continuamente confrontati in tempo reale e il "tempo internazionale" adottato è quello risultante dalla media fra tutti gli orologi atomici, dopo aver scartato quelli che sono in disaccordo al di fuori di una certa tolleranza.

[4] Nei *Principia* Newton definisce il tempo come qualcosa che "in sé e per sua natura, senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente". Al di là della radice filosofico-religiosa dell'*alcunché di esterno*, è probabile che Newton avesse in mente il riferimento al sistema delle "stelle fisse": in quel periodo si stavano mettendo a punto i primi strumenti di precisione per la misura del tempo (i pendoli di Huygens) e si stavano scoprendo le disuniformità del moto della Terra intorno al Sole, che avviene su una ellisse e non su un cerchio, e causa quindi leggere variazioni nel "mezzogiorno solare", e quindi sulla misura del tempo basata su meridiane.



➔ *Il concetto di <u>velocità</u> e la sua misura*

Conviene iniziare da un qualunque <u>semplice esperimento</u> (punti **a**, **b** e **d** del "**Come**") in cui si misura una *velocità*, come, ad esempio, la velocità in una corsa, di un proiettile, di un'auto fra due semafori. La velocità è il rapporto fra una distanza percorsa e il tempo impiegato, $v=Ds/Dt$, quindi occorre ripensare sia a come si misura lo spazio Ds sia il tempo Dt.

Occorre riflettere anche sulla velocità del suono e della luce: esaminare il funzionamento di un sonar e di un radar, il ritardo del segnale di eco in una stanza (un segnale riflesso a una distanza di circa 10 m torna con un ritardo di circa 20/300 ≈ 0,06 s, sufficiente per sovrapporsi alla lettera successiva in una parlata o alla nota successiva in un brano musicale). Anche per il segnale sonoro o luminoso va capito che c'è una misura di spazio percorso e di tempo impiegato, ma occorre avere, in più, un modello di come e perché il segnale "viaggia" nello spazio.

➔ *<u>Velocità relativa</u> e <u>composizione delle velocità</u>*

Conviene iniziare da un qualunque <u>semplice esperimento</u> (punti **a**, **b** e **d**) in cui si misurano velocità relative. In una misura di velocità lo spazio percorso[5] va riferito a un particolare sistema di *riferimento* e quindi anche la velocità è *relativa* a quel particolare sistema: questo è un punto cruciale da capire bene, perché viene fortemente rivisto nella teoria della relatività. Classicamente, il problema del moto relativo viene trattato ricorrendo alla <u>composizione galileiana delle velocità</u>. Il problema tipico è quello illustrato in figura:

- nell'intervallo di tempo Dt, il proiettile percorre un tratto $Dx = u\,Dt$ rispetto al treno (sistema di riferimento S),
- da terra (sistema S') apparirà che ha percorso il tratto $Dx' = u'\,Dt = (u+V)\,Dt$, perché nel frattempo anche il treno ha percorso un tratto $DX = V\,Dt$, per cui $Dx' = Dx + DX$

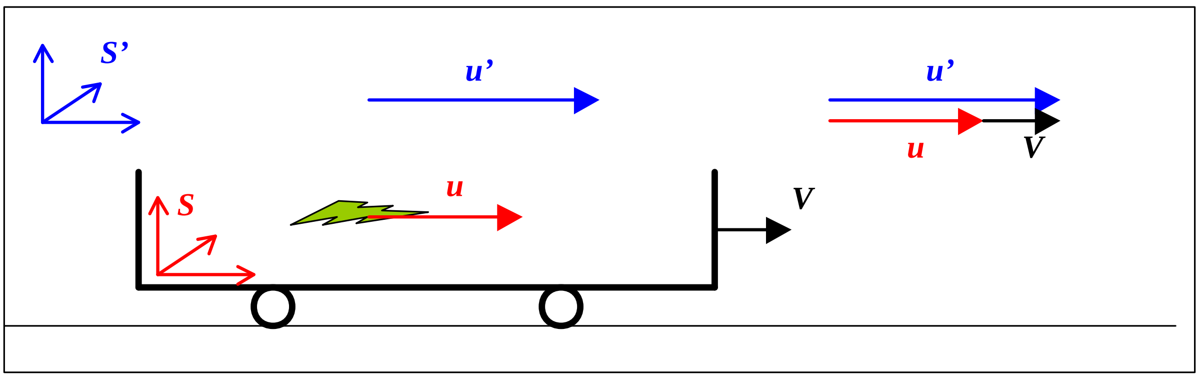


Figura 1

[5] Anche sulla definizione di spazio, Newton parla, nei Principia, di spazio assoluto: "lo spazio assoluto, per sua natura e senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale e immobile".

Sostituendo, si ottiene quindi $u' = u + V$, cioè la regola classica di composizione delle velocità: nel sistema di riferimento S' la velocità u' risulta maggiore perché allo spazio *Dx* percorso dal proiettile rispetto al treno nell'intervallo di tempo *Dt* si aggiunge il tratto *DX* percorso dal treno nel frattempo (Figura 2).

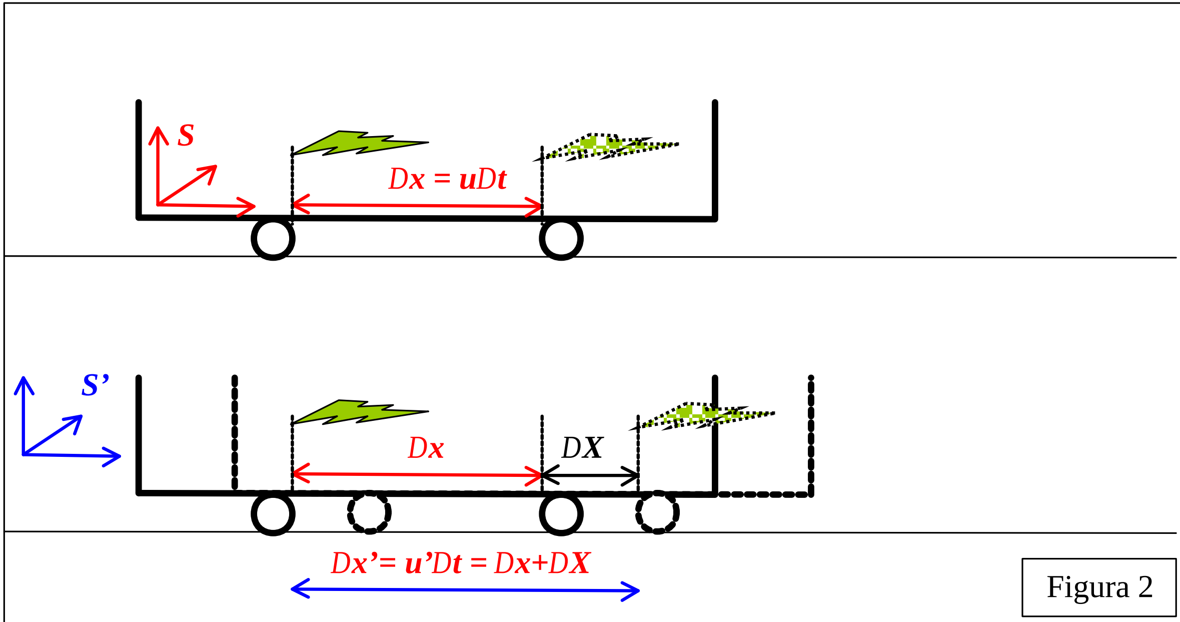


Figura 2

Il motivo per cui è lecito sommare *Dx* a *DX* è che il proiettile avrebbe comunque percorso il tratto *DX* anche se non fosse stato lanciato, essendo solidale con il treno al momento dello sparo. Per avvicinarci a una situazione che sarà poi utile per capire le differenze introdotte dal ragionamento relativistico, conviene esaminare la seguente "situazione-problema" (punto **a** del "**Come**"). Consideriamo un moto in cui il proiettile viene lanciato con velocità ***u*** in direzione perpendicolare al moto del treno e rimbalza elasticamente su una parete a distanza *L*.

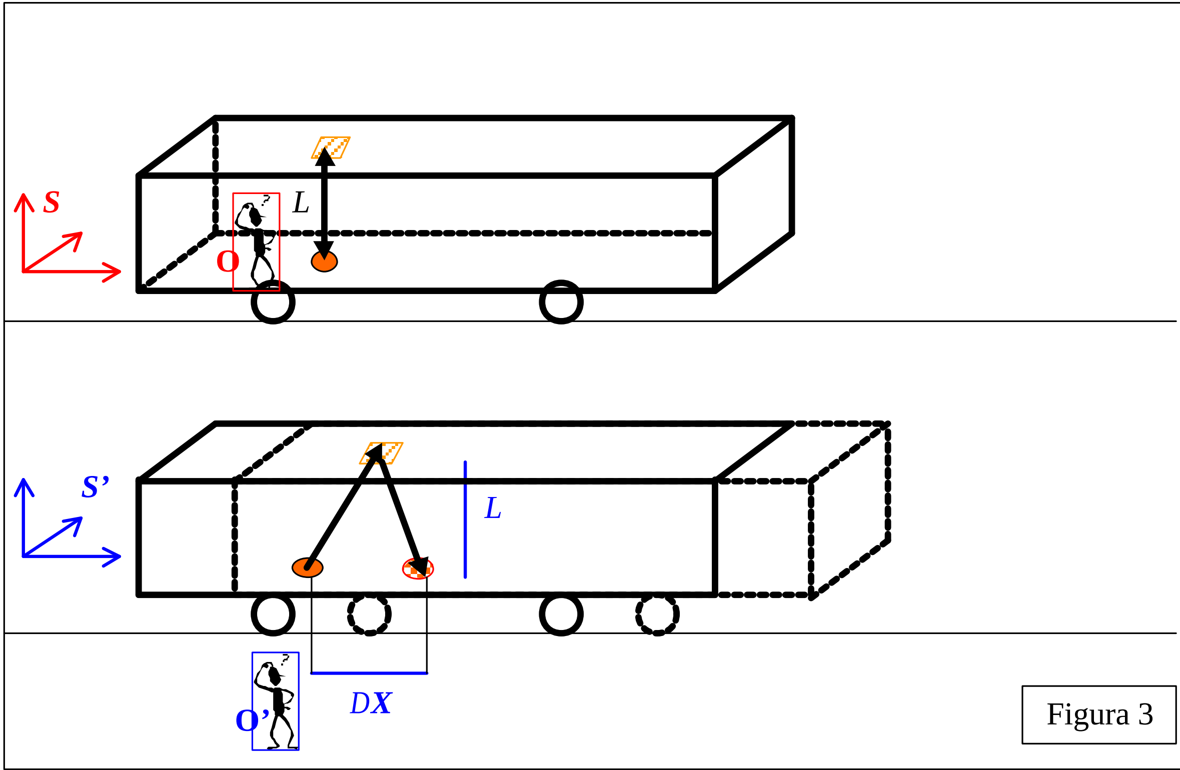


Figura 3

Trascurando la gravità, per l'osservatore **O** che sta sul treno, la pallina si muove con velocità ***u***, percorre un tratto *Ds*=2*L* e torna al punto di partenza dopo un tempo *Dt=Ds/u*. Per l'osservatore **O'** che sta a terra, la pallina si muove con velocità $u' = \sqrt{u^2 + V^2}$, percorre una distanza pari a $ds' = 2\sqrt{L^2 + (dX/2)^2}$ impiegando un tempo *Dt'=Ds'/u'*. Con un po' di algebra, si dimostra che *Dt=Dt'*, cioè entrambi gli osservatori vedono la pallina ritornare in basso allo stesso istante, perché *Ds'* e *u'* sono aumentati nello stesso rapporto rispetto a *Ds* e *u*.

A questo punto si chiede agli studenti di discutere che cosa succederebbe se, anziché una pallina, fosse un *segnale sonoro*, come quello emesso da un sonar, a viaggiare fino alla parete ed essere riflesso: il ragionamento fatto sopra per la pallina non si può applicare in questo caso in modo semplice, perché tutto dipenderà dalle ipotesi che si fanno sul come viaggia il segnale nell'aria. Se, ad esempio, supponiamo che l'aria sia ferma rispetto al vagone, il percorso *Ds* da fare in aria è pari a 2*L*, per cui il segnale torna indietro al punto di emissione dopo un tempo *Dt=2L/u* (*u* è, in questo caso, la velocità del suono in aria): per l'osservatore **O**, che sta sul treno, questo è appunto ciò che egli si aspetta, mentre, per l'osservatore O', che sta a terra, la velocità apparente del suono sembra maggiore, perché apparentemente il segnale sonoro ha percorso un tratto *Ds'* che è maggiore di *Ds*. La velocità di propagazione del suono è quindi data dalla velocità costante *u* di propagazione rispetto all'aria[6] più la velocità con cui l'aria è *trascinata* insieme con il vagone rispetto alla terra.

Ultimo passo è discutere che cosa succede se si manda un segnale luminoso. In questo caso il segnale non ha bisogno dell'aria per propagarsi, perché la luce si propaga anche nel vuoto, come gli studenti dovrebbero sapere, quindi si apre il *problema* di capire come viaggia la luce in una situazione come quella descritta in figura. E' un buon punto di partenza per introdurre la relatività ristretta.

➔ ***Concetti di "<u>velocità dinamica</u>", <u>quantità di moto</u>, <u>massa inerziale</u>, <u>energia</u>***

Anche in meccanica classica la velocità ha un significato "dinamico", è cioè una grandezza fisica che caratterizza il modo con cui il corpo in moto *interagisce* con gli altri corpi (il significato "cinematico" riguarda solo la descrizione dello spazio percorso in funzione del tempo).

Tuttavia, per descrivere l'interazione dinamica, la grandezza che occorre usare non è strettamente la velocità, ma sono due altre grandezze legate alla velocità, cioè la *quantità di moto*, $p=mv$, e *l'energia cinetica*, $E_{cin}=1/2\ m\ v^2$. In meccanica classica le due grandezze vengono spesso introdotte in contesti diversi senza legarle strettamente. Conviene invece, fin dalla meccanica classica, introdurle insieme come i due descrittori dell'effetto dell'interazione sul moto: il prodotto della forza per l'intervallo di tempo in cui agisce dà la variazione di quantità di moto (II° principio della dinamica), mentre il prodotto della forza per il tratto per cui agisce (spostamento) dà la variazione di energia cinetica (teorema delle forze vive):

$$D\mathbf{p} = \mathbf{F}Dt \quad ; \quad DE = \mathbf{F} \times \mathbf{s}$$

La quantità di moto ***p***, essendo un vettore, ha tre componenti, p_x, p_y, p_z, per cui i descrittori della dinamica del moto sono 4: le tre componenti della quantità di moto e l'energia. In relatività diventano il "quadrivettore energia-quantità di moto", per cui conviene fin dalla meccanica classica avere questa visione unificata.

[6] Un'onda sonora che si propaga in un fluido è un'onda di pressione e la sua velocità di propagazione va sempre riferita al fluido in cui l'onda viaggia; essa dipende unicamente dalla *densità r* del fluido e dal *coefficiente di comprimibilità*, $B = -\frac{dp}{dV/V}$ secondo la relazione $u = \sqrt{\frac{B}{r}}$.

Anche la massa *m* è una caratteristica del corpo, legata alla dinamica, perché è la costante di proporzionalità che permette di calcolare come passare dalla variazione *Dp* di quantità di moto alla variazione *Dv* di velocità: in questo senso è chiamata "*massa inerziale*" e, in meccanica classica, ha sempre lo stesso valore, sia quando il corpo è fermo sia quando è in moto. E' importante ripensare alla massa inerziale in questo significato, perché è uno dei punti che vengono modificati in relatività.

➔ ***L'elettromagnetismo e la crisi della meccanica newtoniana***

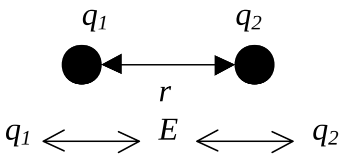
Una riflessione sulle leggi dell'elettromagnetismo è utile anzitutto per capire perché le leggi dell'elettromagnetismo *non sono compatibili* con l'ipotesi alla base della meccanica newtoniana per cui due sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo uniforme registrano le stesse forze e, a un livello più alto, per capire, o meglio intuire, da dove nasce l'ipotesi dell'invarianza della velocità della luce.
Conviene partire dal ripensare alle due leggi fondamentali che descrivono la *forza elettrica* fra due cariche elettriche (legge di Coulomb) e la *forza magnetica* fra due correnti elettriche (legge di Ampere). L'idea è sostanzialmente questa: cariche elettriche reciprocamente ferme sentono solo la forza elettrica, mentre se sono in moto relativo (corrente elettrica) sentono anche una forza magnetica.
È utile, nel ripensare alle due leggi, riflettere sul significato delle costanti e_o e m_o perché rende il confronto più trasparente e aiuta a comprendere il significato dei concetti di "campo" e di "vuoto".

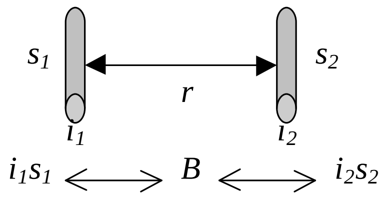
La legge di Coulomb e la costante dielettrica e_o.
Viene introdotta nel definire la forza coulombiana fra due oggetti di carica elettrica q_1 e q_2 posti alla distanza *r*:

$$F_{el} = k_{el}\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4pe_o}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (1)$$

in modo da poter definire una *unità di misura della carica elettrica*, il coulomb, che sia comoda ed efficiente per l'utilizzo che se ne deve fare nelle relazioni fra grandezze elettriche[7]: la (2) permette così di raccordare il coulomb con il metro e il newton, da cui e_o=8.85 10^{-12} $C^2m^{-2}N^{-1}$.
La legge di Ampere e la costante permeabilità magnetica m_o
Introdotto e_o, siamo però obbligati a introdurre un'altra costante per le unità magnetiche. L'equazione analoga alla (1) per il magnetismo è la legge di Ampère che descrive la forza fra due elementi di corrente i_1 e i_2 che circolano nei tratti di filo di lunghezza s_1 ed s_2. Posti a distanza *r*.
Il modo più chiaro di vedere l'analogia fra campi elettrici e magnetici è proprio di sostituire alla carica *q* il prodotto *is*:

[7] In principio non è indispensabile definire una unità di misura specifica per la carica elettrica, perché nella (2) si potrebbe benissimo porre k_{el}=1, e quindi misurare la carica elettrica al quadrato in unità di energia per lunghezza (Jm), come si fa appunto nel sistema di Gauss o nella trattazione di problemi quantistici, dato che energia per lunghezza sono appunto le unità di misura della costante di Planck *h* moltiplicata per la velocità della luce: ad esempio, se la carica è quella dell'elettrone, si ha $e^2=\hbar c/137$, dove a=1/137 è la cosiddetta "costante di struttura fine" e $\hbar = h/2\pi$, il che rende trasparente il significato del quadrato della carica elettrica e la relazione fra le *costanti naturali* $\hbar$, *c, e,* a.
Nel SI di misura, l'unità di misura fondamentale per le grandezze elettriche non è il coulomb ma l'*ampere* (simbolo A), definito come "l'intensità di corrente che, circolando in due fili conduttori paralleli di lunghezza infinita posti alla distanza di 1 m, produce una forza di $2{\cdot}10^{-7}$ N su ogni metro di lunghezza": il motivo della scelta è che è possibile, sia pure notevolmente complesso, realizzare dei dispositivi che misurano con precisione tale forza, mentre non è possibile misurare con precisione comparabile la forza elettrostatica fra cariche.





Per la legge di Biot e Savart, il campo magnetico B generato a una distanza r dall'elementino di corrente i_1s_1 posto in direzione perpendicolare vale, in modulo:

$$B = k_{mag}\frac{i_1s_1}{r^2} = \frac{m_o}{4p}\frac{i_1s_1}{r^2} \qquad (2)$$

e, per la legge di Ampère, la forza che un elementino di corrente i_2s_2 posto nel punto a distanza r in direzione perpendicolare vale, in modulo, $F_{mag}=B\, i_2s_2$, da cui:

$$F_{mag} = \frac{m_o}{4p}\frac{(i_1s_1)\cdot(i_2s_2)}{r^2} \qquad (3)$$

L'analogia con la forza elettrica è ora chiarissima, si vede che c'è la stessa dipendenza dalla distanza, ma si vede anche ora la costante m_o non è messa per ragioni di comodità ma è *obbligatoria*, dato che tutte le unità di misura sono ormai fissate (in unità SI, $m_o=4\pi\ 10^{-7}$ TmA, T=tesla).

Per vederlo meglio, esaminiamo il significato del prodotto is, immaginando che tutta la corrente sia portata da particelle che hanno una carica elettrica complessiva q e viaggiano tutte alla stessa velocità v_d sotto l'azione di una differenza di potenziale elettrico applicato ai capi del filo, come previsto dalla legge di Ohm (nei modelli microscopici alla Drude, v_d è detta "velocità di deriva"). Poiché $i=q/t$ e nel tempo t le particelle percorrono un tratto $s=v_dt$, si ottiene $is=qv_d$, quindi, sostituendo nella (3), si ottiene:

$$F_{mag} = \frac{m_o}{4p}\frac{(q_1v_{d1})\cdot(q_2v_{d2})}{r^2} \qquad (4)$$

La legge di Ampere e l'invarianza per trasformazioni del sistema di riferimento

Dalla relazione (4) si vede chiaramente la natura della forza magnetica, che è proporzionale alla velocità del moto sia della carica "sorgente" del campo sia di quella che "rivela" il campo magnetico B: facendo ad esempio una trasformazione "di Galileo" e portandosi nel sistema di riferimento in cui una delle due cariche è in quiete, la forza magnetica si annulla e resta solo quella elettrica! La forza magnetica *non è quindi invariante* per trasformazioni di Galileo, come ci si aspetterebbe in meccanica newtoniana.

La velocità della luce e le costanti e_o e m_o

Dalla (4) si vede inoltre che non solo forza elettrica e forza magnetica hanno la stessa dipendenza da r, ma hanno anche la stessa dipendenza dalle cariche elettriche. Se facciamo il rapporto tra forza magnetica ed elettrica, queste dipendenze si cancellano e si ottiene:

$$\frac{F_{mag}}{F_{el}} = e_o m_o v_{d1}v_{d2} = \frac{v_{d1}v_{d2}}{c^2} \qquad (5)$$

Dalla (5) si vede infatti chiaramente che il prodotto $e_o\, m_o$ *deve avere le dimensioni dell'inverso di una velocità al quadrato*: il suo valore numerico coincide infatti con *l'inverso del quadrato della velocità della luce*.

Ciò chiarisce il significato fisico di queste due costanti, che non servono solo a "mettere a posto" le unità di misura dei campi elettrici e magnetici, ma hanno effettivamente a che fare con il modo in cui i campi si trasmettono a distanza nel vuoto (non per nulla m_o è chiamata "permeabilità magnetica del vuoto"): la (5) indica quindi che esiste una costante naturale che caratterizza il "vuoto", che ha le dimensioni di una velocità e un valore pari al valore della velocità della luce nel vuoto, che determina il valore delle forze elettriche e magnetiche e quindi quanto rapidamente si propaga l'azione a distanza di cariche elettriche in moto relativo fra di loro con velocità costante.

Per capire che cosa succede quando tale velocità cambia nel tempo, e quindi anche quando i campi elettrici e magnetici cambiano nel tempo, bisogna utilizzare le ultime due equazioni di Maxwell e si scopre così che questi campi *non si propagano istantaneamente, ma viaggiano nello spazio proprio con velocità c*.

Dalle equazioni di Maxwell risulta evidente che le onde elettromagnetiche si propagano nel *vuoto* con velocità *c* costante, pari a circa 300.000 km/s, che è legata alle costanti e_o e m_o (costante dielettrica nel vuoto e permeabilità magnetica nel vuoto) dalla relazione

$$1/c^2 = e_o\, m_o \qquad (6)$$

Poiché le costanti e_o e m_o non dipendono dal moto della sorgente né da quello del "rivelatore" dell'onda e.m., segue che anche *c è invariante*.

Rispetto a quanto discusso sopra a proposito della propagazione dell'onda sonora, siamo quindi nella situazione di onda che si propaga in un mezzo "fermo" (l'etere), a meno di postulare un nuovo *principio di invarianza* (ciò costituirà infatti uno dei "principi" della relatività di Einstein).

Come si vede, capire il significato della (6) e quindi delle costanti e_o e m_o è utile per apprezzare come si sia giunti a tale principio, che è una delle ipotesi fondamentali della relatività ristretta. La derivazione delle equazioni di Maxwell e la dimostrazione della relazione (6) richiedono però l'utilizzo di equazioni differenziali che non rientrano generalmente nei programmi della scuola secondaria, anche per questioni di tempo. Tuttavia la riflessione sul significato delle costanti e_o e m_o può essere fatta sulle prime leggi dell'e.m. ed è utile perché, come detto sopra, aiuta a comprendere il significato dei concetti di "campo" e di "vuoto".

8.4 Come presentare alcuni concetti di relatività ristretta

- *La dilatazione del tempo*

È il concetto fondamentale, quello che, insieme al concetto collegato della contrazione delle lunghezze, crea maggiori difficoltà concettuali: è essenziale affrontarlo perché è alla base della revisione profonda dei concetti di spazio e tempo propri della fisica classica.

Si può partire dal *problema* sollevato sopra a proposito della situazione di Figura 3, per il caso in cui, a viaggiare fra pavimento e soffitto del vagone, sia un segnale luminoso. Dalle equazioni di Maxwell segue che la velocità *c* con cui l'onda elettromagnetica si propaga è sempre la stessa, indipendentemente dal moto della sorgente o del ricevitore o del mezzo in cui l'onda viaggia. Non è tuttavia essenziale che gli studenti conoscano tutto l'elettromagnetismo e le equazioni di Maxwell, per seguire la derivazione della dilatazione del tempo, anche perché capire l'intero argomento dell'invarianza della velocità dell'onda elettromagnetica è abbastanza complesso: si può semplicemente accettare che la velocità sia invariante, come ipotesi del tutto ragionevole, anche perché è confermata da moltissimi esperimenti (vedi Michelson) e prevista dalle leggi dell'elettromagnetismo, ed esplorare le conseguenze.

Facendo i calcoli, per la situazione di figura 3, sotto l'ipotesi che la velocità *c* della luce sia la stessa rispetto al treno in moto e rispetto a terra, si trova che $Dt = Ds/c$, $Dt' = Ds'/c > Dt$ dato che $Ds' > Ds$: i tempi sono quindi diversi, c'è una *dilatazione del tempo* per l'osservatore a terra rispetto a quello che sta sul treno. Per calcolare il fattore di dilatazione basta esplicitare *Ds'*:

$$dt' = \frac{ds'}{c} = \frac{2\sqrt{L^2 + (dX/2)^2}}{c} = \sqrt{\left(\frac{2L}{c}\right)^2 + \left(\frac{dX}{c}\right)^2}$$

Poiché $2L/c = Dt$ e $DX = VDt'$, sostituendo ed elevando al quadrato si ottiene:

$$dt'^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = dt^2$$

Conviene definire il "fattore di dilatazione" g :

$$g = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (7)$$

da cui, sostituendo, si ottiene:

$$dt' = g\,dt \qquad (8)$$

L'idea che due osservatori **O** e **O'** possano misurare diverse durate temporali per lo stesso fenomeno, per il solo fatto che uno è a terra e l'altro su un treno in moto, è abbastanza sconvolgente. Come vedremo dal dibattito storico richiamato più sotto, la derivazione del coefficiente di dilatazione del tempo fu fatta ben presto, subito dopo l'enunciato delle equazioni di Maxwell, come conseguenza dell'invarianza della velocità della luce, ma ci volle molto più tempo per accettare l'idea che il tempo è effettivamente diverso nei due riferimenti. Nelle situazioni abituali del mondo classico, tuttavia, il fattore g è praticamente 1 e quindi l'effetto di dilatazione non è assolutamente apprezzabile. Conviene calcolarlo con l'espansione della (7) in serie di Taylor[8]:

$$g \approx 1 + \frac{1}{2}(V^2/c^2) \qquad (9)$$

Ad esempio, con V=200 km/h≈60 m/s, $V^2/c^2 \approx (60/3{\cdot}10^8)^2 \approx 10^{-14}$.

- *La contrazione delle lunghezze*

- *Il "tempo proprio"*

Anche se piccolissima, la differenza fra la misura dell'intervallo di tempo nei due sistemi di riferimento è importante concettualmente, perché mette in crisi la definizione della misura dell'intervallo di tempo. Supponiamo infatti che un fenomeno di questo tipo sia usato per costruire un "orologio": un brevissimo flash di luce viaggia fra due specchi a distanza L, posti ad esempio sul pavimento e sul soffitto, e ogni volta che il flash colpisce lo specchio in basso l'osservatore **O** sa che è passato un tempo Dt e su questo tempo regola il suo orologio. La stessa cosa fa l'osservatore **O'** rispetto al quale **O** si muove con una velocità V', solo che i tempi che segna l'orologio di **O'** saranno a intervalli Dt' maggiori di Dt.

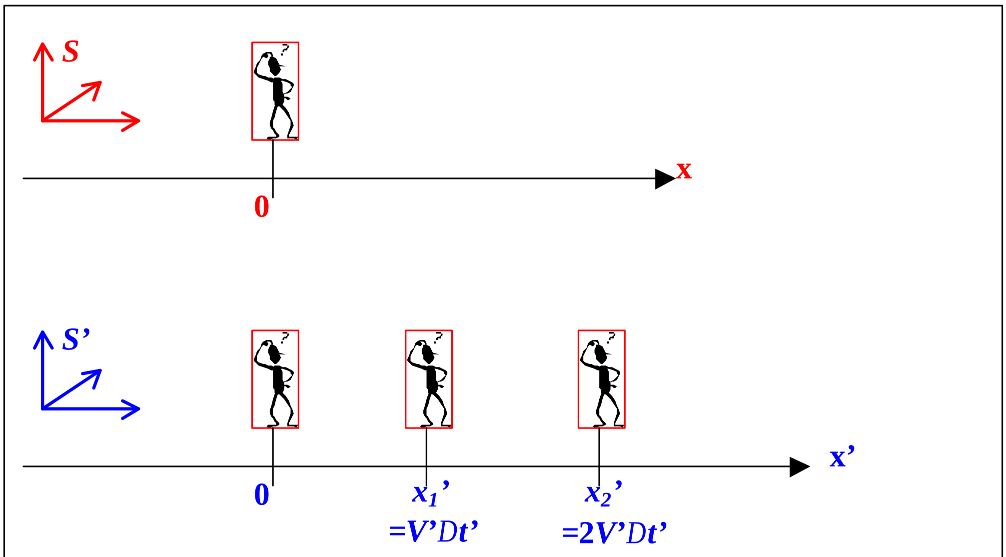


Figura 4

[8] Se gli studenti non conoscono l'espansione in serie, si può calcolare g -1 dal rapporto $(g^2 -1)/(g+1) \approx (g^2 -1)/2$; dalla (1) si ha infatti $g^2 - 1 = \frac{V^2/c^2}{1-V^2/c^2} \approx V^2/c^2$, per cui $g - 1 = \frac{1}{2}(g^2-1) = \frac{1}{2}(V^2/c^2)$.

Contemporaneamente però, l'osservatore **O'** registra, nel suo riferimento S' posizioni x_i' via via crescenti, mentre nel sistema S la posizione x dell'omino è sempre la stessa. La cosa interessante è che la differenza $(c\,Dt')^2 - (x_1')^2$ è pari a Dt^2. Infatti:

$$(c\,Dt')^2 - (x_1')^2 = (c\,Dt')^2 - (V'Dt')^2 = Dt'^2(c^2 - V'^2) = (c\,Dt'/g)^2 = (cDt)^2 \qquad (10)$$

Se l'omino **O**, anziché dal sistema S' rispetto a cui viaggia con velocità V' fosse osservato da un altro riferimento, rispetto a cui viaggia con velocità V'', i tempi Dt'' sarebbero diversi ancora, ma lo sarebbero anche le posizioni x'', e, calcolando le corrispondenti differenze, si troverebbe ancora lo stesso tempo Dt^2. Il tempo Dt ha quindi le seguenti proprietà:

- è il *tempo "proprio"* che si misura nel sistema in cui l'omino **O** è fermo, che è quindi, per l'omino, un sistema privilegiato,
- è il *tempo minimo*, nel senso che in tutti gli altri sistemi di riferimento, in cui l'omino appare in moto, si misura un tempo maggiore,
- è l'*invariante relativistico*, è cioè pari a una grandezza che ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento e che si può ricavare dalla (10): per questo motivo lo chiameremo Dt, in modo da distinguerlo dagli altri intervalli di tempo.

Il concetto di "invariante" è molto importante in fisica, perché segnala l'esistenza di una grandezza fisica che ha sempre lo stesso valore indipendentemente dall'*angolatura* sotto cui la si guarda.

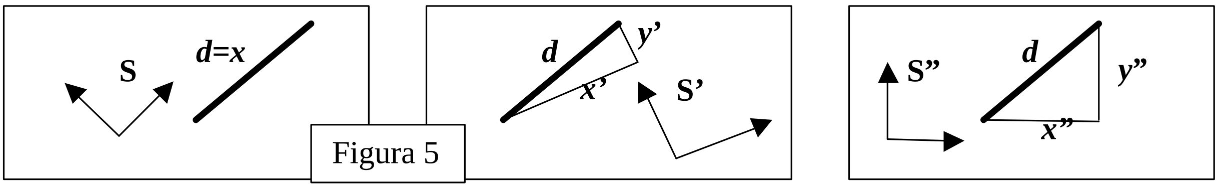
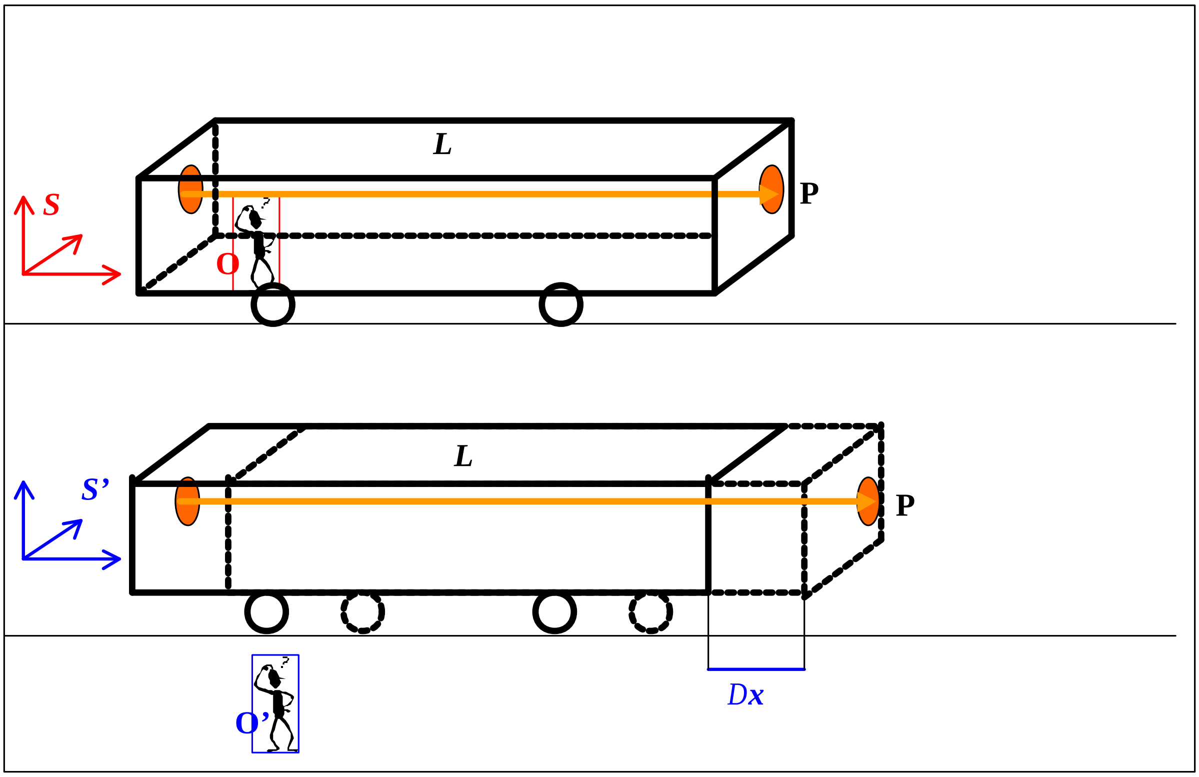


Figura 5

Ad esempio, per il segmento mostrato in figura, l'*invariante* è la lunghezza d del segmento: infatti d^2 è pari alla somma dei quadrati delle due proiezioni, x^2+y^2, indipendentemente dalle direzioni lungo cui si guarda il segmento, che sono diverse nei diversi sistemi: se nel riferimento S la proiezione x è minore che nel riferimento S', la proiezione y deve essere maggiore, in modo che la somma dei quadrati resti costante. Ciò indica che fra x e y c'è un legame, che nasce dal fatto che sono le due componenti del "vettore segmento" in uno *spazio bidimensionale*. Nel caso dell'invariante relativistico, il legame è fra la componente temporale cDt e quella spaziale Dx ed è il riflesso del fatto che lo spazio è *quadridimensionale*: in questo caso l'invariante Dt^2 è la *differenza*, anziché la somma, fra le componenti $(cDt)^2$ e Dx^2, quindi, se in un certo sistema S, Dx^2 è maggiore che nel sistema S', anche $(cDt)^2$ dovrà essere maggiore, in modo da mantenere lo stesso valore alla differenza. Il sistema in cui Dx è nullo è appunto il sistema di quiete in cui Dt è minimo e coincide con il tempo proprio Dt.

➢ *La trasformazione di Lorentz e lo spazio quadridimensionale*

Per comprendere la natura quadridimensionale dello spazio-tempo conviene esaminare, ad esempio, il caso di un segnale luminoso lanciato lungo l'asse del moto anziché in direzione ortogonale, come abbiamo fatto nell'esempio iniziale.



Nel sistema S l’arrivo del segnale luminoso nel punto P è caratterizzato dalle coordinate $x_p=L$, $t_P=L/c$

Secondo Galileo e secondo Einstein, le coordinate nel sistema S’ sono

Galileo:

$x_P'=L+D\,x = x_p + v\,t_P$

$t_P' = L/c = t_P$

Einstein:

$x_P'=L+D\,x = x_p + v\,t_P'$

$t_P' = g\,t_P + D\,x/c = g\,t_P + v\,t_P'/c = g\,t_P + v\,x_P/c^2$

Secondo Galileo, *la luce impiega lo stesso tempo* nei due sistemi ad arrivare in P, perché nel sistema S’ deve percorrere una distanza maggiore, ma va più veloce. Secondo Einstein, il segnale impiega più tempo perché *viaggia alla stessa velocità* nei due sistemi, ma in S’ deve fare più strada. Ciò che risulta in più, rispetto al caso trattato prima, è che, rispetto al tempo t_P nel sistema S, il tempo t_P' nel sistema S’, risulta non solo dilatato, ma *diverso nei diversi punti di diversa coordinata x, con una relazione lineare fra x e t*. Questa relazione lineare nella trasformazione da un sistema di riferimento S a un sistema S’ è appunto quella che lega le diverse componenti di uno stesso vettore (nella prima equazione, il termine x_p a secondo membro deve essere modificato in $g\,x_p$):

Einstein:

$x_P'=g\,x_p + v\,t_P'$

$t_P' = g\,t_P + v\,x_P/c^2$

- *Il significato dinamico della velocità e la quantità di moto relativistica*

In relatività, nasce un problema di interpretazione circa il significato dinamico di velocità, perché, se la velocità che entra nella definizione di quantità di moto deve essere una caratteristica del corpo in moto, nasce un’ambiguità circa la misura dell’intervallo di tempo *Dt*: in quale sistema di riferimento dovrà essere misurato? Nel sistema “proprio” del corpo in moto oppure nel sistema di riferimento in cui si misura lo spazio *Dx* percorso in quell’intervallo di tempo? In meccanica classica, questo problema non c'è, perché la misura dell'intervallo di tempo ha sempre lo stesso valore in tutti i sistemi, ma in relatività c'è il fattore di dilatazione *g* fra le misure di tempo nei due riferimenti:

$$g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$Dt = g\, Dt$ ➔ Dt = intervallo di tempo proprio
➔ Dt = intervallo di tempo nel sistema in cui si misura lo spazio Dx

Nella meccanica relativistica, si dimostra[9] che il tempo da utilizzare nella definizione della quantità di moto è il *tempo proprio Dt* anziché il tempo *Dt* misurato nel generico sistema di riferimento. Questo del resto è ragionevole se si pensa, ad esempio, a una situazione in cui ci sono due corpi che viaggiano, rispetto a un certo sistema di riferimento, l'uno con velocità v_1 e quantità di moto p_1 e l'altro con velocità v_2 e quantità di moto p_2: il tempo *Dt* risulterebbe dilatato rispetto al tempo proprio di un fattore g_1 per il primo e di un fattore g_2 per il secondo! Sarebbe quindi poco chiaro il significato di quantità di moto totale, $p = p_1 + p_2$, che è la quantità che si conserva in assenza di forze esterne rispetto ai due corpi.
Pertanto si definisce:

$$p = m\frac{d\,x}{d\,t} = g\ m\frac{d\,x}{d\,t} = g\ m\ v \qquad (11)$$

La quantità di moto *p*, non è quindi direttamente proporzionale alla velocità *v*, come avviene nella definizione classica, ma, al crescere di *v*, cresce più rapidamente della diretta proporzionalità. Questo fatto ha molte conseguenze:

- supponiamo ad esempio che, con l'applicazione di una forza –dovuta ad esempio all'azione di un campo elettrico su un corpo carico elettricamente– , la quantità di moto vari di un certo *Dp*, la variazione di velocità non sarà proporzionale alla variazione *Dp*, ma varrà $Dv = Dp/g\,m$: poiché, al crescere di *v*, *g* cresce e tende all'infinito quando *v* si avvicina a *c*, *Dv* diminuisce fino a tendere a zero e *v* raggiunge la *velocità limite* pari alla velocità della luce *c*;
- l'*inerzia* con cui il corpo risponde all'applicazione della forza, variando la sua velocità, non è più data dalla massa *m* ma dal prodotto *g m*, quindi cresce al crescere della velocità. Per questo motivo talvolta il prodotto *g m* viene chiamato impropriamente "massa relativistica". Il termine è improprio, anche se storicamente è il termine che è stato usato fin dalla scoperta di questa proprietà dell'inerzia relativistica, perché trasmette l'idea che la massa "fisica" del corpo possa variare: la massa invece è una caratteristica propria del corpo, che ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento, quindi è "invariante" anche quando il corpo cambia velocità oppure è visto da un sistema di riferimento che è in moto relativo rispetto al corpo;
- il concetto di "accelerazione" va rivisto: classicamente "*accelerare*" significa cambiare sia la velocità sia la quantità di moto, entrambe in modo proporzionale alla forza, relativisticamente ciò vale solo per piccole velocità, mentre, quando ci si avvicina alla velocità della luce, accelerare significa variare la quantità di moto, anche se la velocità può restare praticamente invariata;
- la grandezza che ha un vero *significato dinamico* è la quantità di moto e non la velocità: questo era vero anche in meccanica classica, ma, mentre nel caso classico il passaggio da

[9] La dimostrazione si può fare in vari modi: il modo diretto è dimostrare che, solo usando questo tempo, si ha la conservazione della quantità di moto totale nell'urto di due corpi vista in sistemi di riferimento diversi; un modo alternativo è seguito da Amaldi nel paragrafo 2.5. Da notare che il tempo *Dt* va invece utilizzato, come del resto è fatto nella formula sopra riportata, nella definizione "cinematica" della velocità, quando cioè si è effettivamente interessati a conoscere lo spazio *Dx* che il corpo percorre nel tempo *Dt*.

una grandezza all'altra è una questione di semplice proporzionalità, nel caso relativistico la confusione può portare a gravi errori.

- *L'equivalenza tra massa ed energia*

Quale è il significato vero del prodotto *g m*, cioè dell'inerzia relativistica? Per capirlo, conviene esaminare non *g m* ma la quantità $E = g\, m\, c^2$, che, dimensionalmente, ma anche effettivamente, è una *energia*. Se il corpo ha una velocità molto minore di *c*, possiamo usare lo sviluppo di *g* in serie di Taylor dato in eq.3:

$$E = g\; m c^2 = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad (12)$$

Nell'espressione $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ riconosciamo chiaramente il secondo termine, che è l'energia cinetica, mentre il primo termine rappresenta l'*energia di massa*, cioè quella energia che rimane anche quando il corpo è fermo, cioè la sua energia cinetica è nulla:

$$\boxed{E = \underbrace{mc^2}_{\textit{energia di massa}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\textit{energia cinetica}}}$$

8.5 Lo sviluppo storico

- *Dibattito storico pre-Einstein*
  - ➔ L'inizio: la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento (Maxwell, 1864)
  - ➔ Dilatazione del tempo: proposta in forma incompleta per la prima volta da W.Voigt (1887), come "artifizio matematico" per soddisfare le equazioni di Maxwell che vogliono la velocità della luce costante in tutti i sistemi di riferimento, e riformulata, sempre nello stesso spirito, da Lorentz nel 1904.

    Il calcolo del fattore di dilatazione *g* e la dimostrazione che essa segue dalla invarianza della velocità della luce sono riportati sopra; vedere anche "Amaldi", 1.6

  - ➔ Contrazione delle lunghezze: proposta per la prima volta da Fitzgerald (1889), sulla base di un modello dinamico (il moto della luce attraverso l'etere modifica le dimensioni fisiche degli oggetti materiali che vi sono immersi).

    Per il calcolo del fattore di contrazione *g* e la dimostrazione che essa segue dalla invarianza della velocità della luce vedere "Amaldi", 1.7.
  - ➔ Trasformazioni di Lorentz (Amaldi 1.9): proposte per la prima volta da Larmor (1898) a partire dal "principio degli stati corrispondenti" enunciato poco prima da Lorentz; riformulate nella versione finale completa da Lorentz nel 1904. Il modello alla base della proposta di Lorentz è sostanzialmente un modello dinamico "costruttivista":
    - il moto della luce attraverso l'etere modifica le forze interatomiche,
    - il tempo "vero" o "assoluto" è quello misurato nel sistema di quiete dell'etere, il tempo "dilatato" è un tempo "locale", introdotto come puro artifizio matematico per tenere in conto le forze interatomiche sconosciute dovute al moto dell'etere
  - ➔ Concetto di simultaneità (Amaldi 1.5): l'analisi del concetto di simultaneità e della misura del tempo fu opera di Poincaré che la iniziò fin dal 1898, e la portò avanti, con integrazioni

successive in parallelo agli studi di Lorentz e poi anche di Einstein. Poincaré arrivò a capire che

- non esiste un tempo assoluto,
- il sistema in cui l'etere è fermo non è un sistema privilegiato, ma tutti i sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo uniforme sono equivalenti,
- che le leggi della meccanica debbono essere "covarianti" rispetto alle trasformazioni di Lorentz e quindi è necessario riformulare la meccanica di Newton

➢ *La relatività di Einstein (1905)*
La relatività di Einstein non è un modello ad hoc, ma una *teoria di principio*
➔ i postulati: <u>principio di relatività e costanza della velocità della luce</u> (Amaldi 1.4)
➔ l'equivalenza massa-energia

➢ *Gli esperimenti*
➔conviene dare un'idea del valore della velocità della luce ($3 \cdot 10^8$ m/s, cioè 8 minuti per percorrere la distanza Terra – Sole che è $\approx$150 milioni di km) e di come si misura (discutere in particolare le misure storiche già note al tempo di Maxwell, come il metodo di Fizeau o i metodi astronomici che utilizzano il periodo dei satelliti di Giove);
➔discutere come si potrebbe controllare se la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento (ad esempio discutere l'esperimento di Michelson, "Amaldi" 1.2)

Esercizio
1. Calcoli su un fenomeno relativistico (obbligatorio)
Realizzate un calcolo realistico e significativo su un fenomeno relativistico.

2. Costruite una *unità di lavoro*, sull'introduzione alla relatività ristretta, specificando:
- contesto, prerequisiti,
- inserimento a grandi linee nel curriculum, con indicazioni della scaletta dei tempi,
- agganci alla meccanica classica che si intendono sfruttare/sottolineare,
- scelta degli argomenti specifici da trattare,
- modalità di conduzione.

All'interno dell'unità di lavoro, sviluppate una *breve unità didattica* che si possa svolgere in un paio di lezioni, ma copra un argomento significativo fra quelli sopra individuati, e contenga:
- la descrizione dettagliata dell'argomento, con motivazione della scelta e obiettivi specifici, con particolare riferimento alle difficoltà concettuali degli allievi,
- l'indagine delle pre-conoscenze e "attacco",
- lo sviluppo del tema, con riferimento a eventuali esperimenti/ fenomenologia / esercizi/ problemi che si intende presentare,
- il tipo e livello di formalizzazione,
- le modalità di valutazione.